

О СВОЙСТВАХ СПЕКТРА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ ВБЛИЗИ ПОРОГА РАСПАДА ВОЗБУЖДЕНИЙ

Л. П. Питаевский

Методами квантовой теории поля исследована особенность гриновской функции бозе-жидкости вблизи порога распада возбуждений без предположения о слабости взаимодействия. Показано, что существует три возможных типа порогов распада. В первом случае скорость возбуждения в пороговой точке $p = p_c$ делается равной скорости звука, так что, начиная с этой точки, возбуждение может рождать фононы, что приводит к его затуханию, пропорциональному $(p_c - p)^3$. В двух других случаях возбуждение в пороговой точке может распасться на два возбуждения с неравными нулю импульсами, параллельными или направленными под углом друг к другу. В обоих этих случаях кривая спектра оканчивается в точке порога, причем скорость возбуждения в этой точке равна скорости каждого из образующихся при распаде возбуждений. Рассмотрено рассеяние нейтронов в жидкости с рождением возбуждений вблизи порога.

1. Постановка вопроса. Возможные типы порогов распада

Настоящая работа посвящена исследованию свойств спектра элементарных возбуждений в бозе-жидкости вблизи его точки окончания. Как известно, при малых импульсах возбуждения в бозе-жидкости являются фононами, т. е. энергия возбуждения зависит от импульса линейно. С увеличением импульса спектр отклоняется от линейного и дальнейший его ход зависит от конкретных свойств взаимодействия между частицами жидкости и не может быть вычислен теоретически в общем виде. Так, энергетический спектр жидкого He^4 имеет сложную форму с минимумом при $p = 2 \cdot 10^{-10}$ г·см/сек. При дальнейшем увеличении импульса энергия возбуждения достигнет некоторого порогового значения, выше которого возбуждение неустойчиво и может распасться на два или более возбуждений с меньшей энергией. Эта точка является точкой окончания спектра, при больших импульсах возбуждения уже не существуют как незатухающие¹. Точка окончания есть особая точка спектра, и предлагаемая работа посвящена выяснению характера этой особенности². Мы увидим далее, что это исследование может быть проведено в общем виде, без каких бы то ни было предположений о слабости взаимодействия.

При распаде возбуждения на два должны выполняться законы сохранения энергии и импульса, которые можно выразить уравнением

$$\varepsilon(p) = \varepsilon(q) + \varepsilon(|p - q|). \quad (1)$$

Здесь p и $\varepsilon(p)$ — импульс и энергия распадающегося возбуждения, q и $\varepsilon(q)$ — импульс и энергия одного из возбуждений, образующихся при распаде, $q_1 = p - q$ и $\varepsilon(|p - q|)$ — импульс и энергия второго образовавшегося возбуждения. Если уравнение (1) при заданном p не имеет решений для q , то распад невозможен. Порог распада (импульс возбуждения в пороговой точке мы обозначим через p_c , энергию через $\varepsilon_c = \varepsilon(p_c)$) характеризуется тем, что (1), рассматриваемое как уравнение для q , не имеет решений при $\varepsilon < \varepsilon_c$ и имеет решение при $\varepsilon = \varepsilon_c$. Для этого, очевидно, необ-

¹ Речь идет об абсолютном нуле температур. При абсолютном нуле распад является единственным механизмом затухания бозе-возбуждений.

² Указанная постановка вопроса принадлежит Л. Д. Ландау [1].

ходимо, чтобы правая часть (1) при $p = p_c$ имела как функция q минимум при некоторых значениях q . При $p = p_c$ правая часть (1) зависит от двух переменных — q и ϑ , где ϑ — угол между векторами p и q . Для того чтобы указанное выражение имело минимум по ϑ , необходимо, чтобы $\cos \vartheta$ имел максимум, т. е. угол ϑ равнялся нулю, или чтобы функция $\varepsilon(|p - q|) = \varepsilon(q_1)$ при некотором $\vartheta = \vartheta_0$ имела минимум по $\cos \vartheta$, а следовательно, и по своему аргументу q_1 при некотором значении $q_1 = p_0$.

В первом случае образующиеся при распаде возбуждения вылетают «вперед», т. е. по направлению вектора p и имеют одинаковую скорость v_c . (Иначе в правой части (1) имелись бы линейные по приращениям q члены и она не могла бы иметь минимума). Здесь имеются две возможности. Во-первых, одно из распадных возбуждений может иметь импульс, сколь угодно близкий к нулю. Это соответствует случаю, когда в точке p_c скорость возбуждения сравнивается со скоростью звука c и возбуждение может родить фонон (случай а). Во-вторых, оба родившихся возбуждения могут иметь конечный импульс (случай б).

Перейдем к случаю конечного ϑ . В этом случае каждое из возбуждений рождается с импульсом, равным p_0 , при котором энергия $\varepsilon(q)$ минимальна, т. е. имеет вблизи p_0 «ротонный» вид

$$\varepsilon(q) = \Delta + (q - p_0)^2/2\mu. \quad (2)$$

При энергии возбуждения $\varepsilon = \varepsilon_c = 2\Delta$ возбуждение распадается на два ротона с $q = p_0$ и $\varepsilon = \Delta$, вылетающих под таким углом ϑ_0 , чтобы сумма импульсов была равна p_c (случай в); для этого разумеется, необходимо, чтобы было $p_c < 2p_0$. Указанными тремя случаями исчерпываются все типы порогов распада на два возбуждения³.

Для исследования вида спектра вблизи пороговой точки мы воспользуемся методами квантовой теории поля; именно мы будем вычислять гриновскую функцию элементарных возбуждений, полюса которой и определяют нам спектр возбуждений. При этом мы будем рассматривать элементарные возбуждения как бозевские частицы, способные распадаться. Мы также примем, что взаимодействие между возбуждениями носит трехчастичный характер, т. е., что гамильтониан взаимодействия имеет вид произведения трех ψ -операторов. Это предположение делается лишь для упрощения формул. Легко убедиться в том, что учет в гамильтониане членов с произведением большего числа операторов не меняет результата. Отметим, что более строго бозе-жидкость можно было бы рассматривать на основе развитой Беляевым [4] техники, в которой система описывается не одной, а двумя гриновскими функциями. Можно, однако, показать, что оба подхода в нашем случае приводят к одинаковым результатам. Это связано с тем, что обе указанные функции, как нетрудно доказать в общем виде, имеют одни и те же полюса, так что все изменения по сравнению с описанным ниже рассмотрением сводятся к появлению в уравнениях нескольких членов с совершенно одинаковым аналитическим поведением вместо одного.

2. Форма спектра вблизи пороговой точки

Для выяснения характера особенности функции Грина $G(p)$ мы воспользуемся уравнением Дайсона, которое имеет вид, показанный на рис. 1 [5]. Здесь жирной линией обозначена полная гриновская функция G , тонкой линией — свободная гриновская функция G_0 , заштрихованным кружком —

³ Как показал Н. Н. Боголюбов [2], почти идеальный бозе-газ имел бы фононный спектр с $(\partial^2\varepsilon/\partial p^2)_{p=0} > 0$. Такой спектр является неустойчивым с самого начала. Согласно вычислениям Беляева [3], затухание возбуждения в этом случае пропорционально p^5 при малых p . В реальном гелии, однако $(\partial^2\varepsilon/\partial p^2)_{p=0} < 0$.

полная вершинная часть Γ , точкой — вершинная часть в первом приближении теории возмущений Γ_0 . В аналитическом виде это уравнение имеет

$$\frac{G}{p} = \frac{G_0}{p} + \frac{G_0}{p} \Gamma_0 \frac{G}{p-q} \Gamma G$$

Рис. 1

вид

$$G^{-1}(p) - G_0^{-1}(p) = i \int \Gamma(p; q, p-q) G(q) G(p-q) \Gamma_0(p; q, p-q) d^4q / (2\pi)^4. \quad (3)$$

В аргументах гриновских функций и вершинных частей здесь и в дальнейшем p означает 4-вектор энергии — импульса с компонентами $\{\epsilon, p\}$, аналогично $q = \{\omega, q\}$ и т. п.

Свойства уравнения (3) вблизи порогов всех трех типов, указанных в разделе 1, совершенно различны, и мы должны рассмотреть все эти случаи отдельно.

а. Свойства спектра вблизи порога рождения ф о н о н а. Рассмотрим свойства спектра возбуждений вблизи точки, где скорость возбуждений делается равной скорости звука. Начиная с этой точки, возбуждение может рождать фонон. Закон сохранения (1) в этом случае принимает вид

$$\epsilon(p) = \epsilon(|p - k|) + \omega(k), \quad (4)$$

где $\omega(k)$ — частота фонона, k — его волновой вектор⁴. При малых k $\omega(k)$ имеет вид

$$\omega(k) = ck - \alpha k^2 \quad (5)$$

(c — скорость звука). Мы будем считать, что $\alpha > 0$, т. е. что фононный спектр является устойчивым. (См. сноску 3). Функция $\epsilon(p)$ имеет при $p = p_c$ особенность. Мы, однако, предположим (это будет подтверждено в дальнейшем), что эта особенность сказывается лишь в членах более высокого порядка малости, чем второй, т. е. что

$$\epsilon(p_c + \Delta p) \approx \epsilon_c + c\Delta p + \beta(\Delta p)^2. \quad (6)$$

(По предположению скорость возбуждения при $p = p_c$ равна c .)

При $p = p_c$ и $\cos \vartheta = 1$ (ϑ — угол между k и p) правая часть (4) с учетом (5) и (6) имеет вид

$$\epsilon_c + (\beta - \alpha)k^2. \quad (7)$$

Точка $p = p_c$ действительно является порогом лишь при условии, что выражение (7) имеет при $k = 0$ минимум, т. е. если выполняется неравенство $\beta > \alpha$.

Поскольку при $p = p_c$ в рассматриваемом случае возбуждение может родить фонон с $k \rightarrow 0$, в интеграле в (3) будет существенна область малых значений аргумента одной из гриновских функций, например q . При $\omega \ll \epsilon_c$, $q = k \ll p_c$ гриновская функция $G(q)$ является функцией распространения фонона и имеет вид

$$G^{-1}(k) = B^{-1}[\omega^2(k) - \omega^2 - i\delta] \approx B^{-1}[(ck - \alpha k^2)^2 - \omega^2 - i\delta], \quad \delta \rightarrow +0. \quad (8)$$

⁴ Мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = 1$.

При $p \approx p_c$ и $\varepsilon \approx \varepsilon_c$ функция $G^{-1}(p)$ имеет особенность. Мы, однако, предположим, что, в соответствии с (6), $G^{-1}(p)$ вблизи нуля (т. е. вблизи полюса G) имеет вид

$$G^{-1}(p) = A^{-1} [c\Delta p - \Delta\varepsilon + \beta(\Delta p)^2 - i\delta] \\ (\Delta p = p - p_c, \Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_c) \quad (9)$$

плюс члены более высокого порядка, которые мы должны определить.

При малых k вершинная часть Γ_0 , как известно, имеет вид $g_0 k$. Мы предположим, что при $k \rightarrow 0$ Γ также пропорциональна k :

$$\Gamma(p, k, p - k) = gk \quad \text{при } k \rightarrow 0. \quad (10)$$

В этом случае интегральное уравнение (3) для G может быть решено последовательными приближениями.

Мы разделим область интегрирования в (3) на две области — по большим k и ω : $k \geq K$, $\omega \geq \Omega$ и по малым k и ω : $k \leq K$, $\omega \leq \Omega$, причем

$$\Delta p \ll K \ll p_c, \quad \Delta\varepsilon \ll \Omega \ll \varepsilon_c. \quad (11)$$

Во второй области можно пользоваться для $G(k)$, $G(p - k)$ и Γ выражениями (8) — (10). Учитывая, что интеграл по большим k и ω не имеет особенности, получаем из (3)

$$G^{-1} \sim i \int \frac{k^4 dk d(\cos \vartheta) d\omega}{[(ck - \alpha k^2)^2 - \omega^2 - i\delta][c(\Delta p - k \cos \vartheta) - \Delta\varepsilon + \omega + \beta(\Delta p - k)^2 - i\delta]}. \quad (12)$$

Знак \sim здесь и в дальнейшем означает, что правая часть равенства может отличаться от левой на неимеющие особенности коэффициент и аддитивную добавку. В дальнейшем мы будем опускать регулярные коэффициенты, не оговаривая этого специально.

В интеграле (12) существенны малые углы $\vartheta \ll 1$, поэтому мы с требуемой точностью смогли положить в квадратичных членах $\cos \vartheta = 1$. Интегрирование по ω можно распространить на интервал $-\infty < \omega < +\infty$. В результате оно сводится к взятию вычета по ω при $\omega = ck - \alpha k^2$. Имеем

$$G^{-1}(p) \sim \int \frac{k^3 dk d(\cos \vartheta)}{x + ck(1 - \cos \vartheta) - 2\beta\Delta pk - k^2(\alpha - \beta)} \sim \\ \sim \int k^3 \ln [x - 2\beta k \Delta p + (\beta - \alpha)k^2] dk. \quad (13)$$

Здесь введено обозначение $x = c\Delta p + \beta(\Delta p)^2 - \Delta\varepsilon$. Разлагая выражение под логарифмом на множители и интегрируя, получаем

$$G^{-1}(p) \sim a_1 (k_1/2)^3 \ln k_1 + a_2 (k_2/2)^3 \ln k_2, \quad (14)$$

где

$$k_{1,2} = \beta\Delta p \pm \sqrt{(\beta\Delta p)^2 - (\beta - \alpha)x}.$$

Из (14) видно, что G^{-1} действительно имеет особенность в членах более высокого порядка, чем те, которые использованы в равенстве (9), что и оправдывает сделанное предположение.

Определим $G^{-1}(p)$ в непосредственной близости к полюсу $G(p)$, а именно при

$$|x| \ll \beta(\Delta p)^2. \quad (15)$$

В этом случае можно пренебречь членом с k_2 . Тогда получаем

$$G^{-1} \sim (\Delta p)^3 \ln(-\Delta p) \quad (16)$$

или с учетом (9)

$$G^{-1}(p) = A^{-1} [c\Delta p + \beta(\Delta p)^2 + a(\Delta p)^3 \ln(-\Delta p) - \Delta\varepsilon]. \quad (17)$$

Формула (17) определяет энергию элементарного возбуждения вблизи порога:

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_c + c(p - p_c) + \beta(p - p_c)^2 + a(p - p_c)^3 \ln(p_c - p). \quad (18)$$

Таким образом, при $p > p_c$ энергия возбуждения имеет отрицательную мнимую часть, равную $-a\pi(\Delta p)^3$. Это означает, что при $p > p_c$ возбуждения затухают, причем время их жизни обратно пропорционально $(p - p_c)^3$. Отметим, что такой же результат мы получили бы и с помощью теории возмущений. Это связано с тем, что взаимодействие с длинноволновыми фононами всегда является слабым из-за наличия множителя k в Γ .

Зная гриновскую функцию, легко убедиться в том, что все поправки к Γ имеют порядок не ниже k и таким образом оправдать предположение о том, что Γ пропорциональна k .

б. Свойства спектра вблизи порога распада на два возбуждения с параллельными неравными нулю импульсами. В этом случае при интегрировании по q в (3) существенны, как это можно ожидать и из физических соображений, те значения 4-импульса q , с которыми рождаются возбуждения вблизи порога. Но значения импульса и энергии, с которыми рождаются возбуждения вблизи порога, не являются особыми для гриновских функций. Единственная особенность этой точки заключается в том, что в ее окрестности данное возбуждение могло бы «слипнуться» с другим — процесс, который невозможен при абсолютном нуле из-за отсутствия реальных возбуждений. Поэтому гриновские функции, стоящие под интегралом в (3), имеют вблизи полюса обычный вид

$$G^{-1}(q) = A^{-1}[\varepsilon(q) - \omega - i\delta], \quad \delta \rightarrow +0. \quad (19)$$

Это обстоятельство сильно облегчает исследование вопроса.

Рассмотрим правую часть (3). Величина Γ_0 в этом уравнении, разумеется, не имеет особенностей при $p = p_c$. Мы предположим также, что полная верхняя часть Γ не обращается в точке порога ни в нуль, ни в бесконечность.

Разобъем, как и в случае рождения фонона, область интегрирования по q в (3) на малую, вблизи значений импульса и энергии q_0 и ε_0 , с которыми рождаются возбуждения⁵

$$|q - q_0| \ll K \ll p_c, \quad |\omega - \varepsilon_0| \ll \Omega \ll \varepsilon_c$$

и большую. В малой области можно считать Γ и Γ_0 постоянными. В результате

$$\begin{aligned} G^{-1}(p) &\approx i \int \frac{d\omega d^3q}{[\varepsilon(q) - \omega - i\delta][\varepsilon(|p - q|) - \varepsilon + \omega - i\delta]} \approx \\ &\approx \int \frac{d^3q}{\varepsilon(q) + \varepsilon(|p - q|) - \varepsilon}. \end{aligned} \quad (20)$$

Поскольку при $p = p_c$ выражение $\varepsilon(q) + \varepsilon(|p - q|)$ должно иметь минимум, при p , близком к p_c , оно имеет вид

$$\varepsilon(q) + \varepsilon(|p - q|) \approx \varepsilon_c + v_c \Delta p + \alpha(q - q_0)^2 + \beta(q - q_0, p_c)^2 / p_c^2, \quad (21)$$

где v_c — скорость каждого из образующихся в пороговой точке возбуждений, $q_0 = v p_c$ — импульс одного из рождающихся возбуждений, α и β —

⁵ В интеграле в (3) существенна и симметричная область $q \approx p_c - q_0$, $\omega = \varepsilon_c - \varepsilon_0$. Эта область дает в точности тот же вклад, что и первая, и мы не будем писать соответствующие члены.

коэффициенты, определяемые видом функций $\varepsilon(q)$ и $\varepsilon(|q-p|)$:

$$\alpha = \frac{v_c p_c}{2q_0(p_c - q_0)}, \quad \beta = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q^2} \right)_{q=q_0} + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q^2} \right)_{q=p_c - q_0} - \frac{v_c p_c}{q_0(p_c - q_0)} \right\}.$$

Вводя новую переменную $u = q - q_0$, $u p_c = u p_c \cos \psi$, получаем

$$G^{-1} \sim \int \frac{u^2 du d(\cos \psi)}{v_c \Delta p - \Delta \varepsilon + \alpha u^2 + \beta u^2 \cos^2 \psi} \sim \sqrt{v_c \Delta p - \Delta \varepsilon}. \quad (22)$$

Перед корнем в (22) должен стоять знак плюс, так как при $v_c \Delta p - \Delta \varepsilon > 0$ интеграл в (22) положителен. Поскольку точка $p = p_c$, $\varepsilon = \varepsilon_c$ по предположению есть точка спектра, то при $\Delta p = 0$ и $\Delta \varepsilon = 0$ $G^{-1}(p)$ должна обращаться в нуль, а следовательно, при малых $\Delta \varepsilon$ и Δp регулярная часть $G^{-1}(p)$ должна иметь вид $a' \Delta p + b' \Delta \varepsilon$. Окончательно

$$G^{-1}(p) = A_1^{-1} [a \Delta p + \Delta \varepsilon + b \sqrt{v_c \Delta p - \Delta \varepsilon}]. \quad (23)$$

Энергия возбуждения определяется уравнением

$$G^{-1}(p) = 0. \quad (24)$$

Для того чтобы это уравнение имело решение при $p < p_c$, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$(a + v_c) / b > 0. \quad (25)$$

При этом решение уравнения (24) имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_c + v_c (p - p_c) - \left(\frac{a + v_c}{b} \right)^2 (p - p_c)^2. \quad (26)$$

При $p > p_c$ уравнение (24) вообще не имеет решений для ε вблизи ε_c — ни действительных, ни комплексных. Таким образом, в этом случае кривая энергетического спектра подходит к точке порога с наклоном, равным v_c , и дальше не продолжается. Далее можно легко убедиться, что все поправки к Γ конечны, что оправдывает сделанное предположение о конечности Γ в пороговой точке.

в. Распад на два возбуждения, вылетающие под углом друг к другу. В этом случае, как и в предыдущем, при интегрировании существенна область тех значений q , с которыми рождаются возбуждения вблизи пороговой точки. В этой области гриновские функции имеют обычный вид (19). Однако теперь уже нельзя утверждать, что вершина Γ конечна при $\varepsilon = \varepsilon_c$. Для выяснения характера особенности $\Gamma(p; q, p - q)$ мы выразим ее через $\Gamma_0(p; q, p - q)$ и неприводимую четырехчастичную вершинную часть $\gamma_1(q_1, p - q_1; q, p - q)$, т. е. совокупность всех тех четырехчастичных графиков, которые не могут быть разделены между концами q_1 , $p - q_1$ и q , $p - q$ на две части, соединенные лишь одной или двумя линиями. Для того чтобы выразить Γ через Γ_0 и γ_1 , нужно или просуммировать ряд, изображенный на рис. 2, а, или решить являющееся следствием этого ряда интегральное уравнение, изображенное на рис. 2, б. Аналитически это уравнение можно записать в виде⁶

$$\Gamma(p; q, p - q) - \Gamma_0(p; q, p - q) = i \int \Gamma(p, q_1, p - q_1) G(q_1) G(p - q_1) \times \\ \times \gamma_1(q_1, p - q_1; p, p - q) d^4 q_1 / (2\pi)^4. \quad (27)$$

Подчеркнем, что это уравнение является точным.

⁶ С помощью уравнения (27) легко определить $\Gamma(p; q, p - q)$ в случае б. Оказывается, что в этом случае $\Gamma(p_c + \Delta p; q, p_c + \Delta p - q)$ имеет вид

$$\Gamma \approx P + Q \sqrt{v_c \Delta p - \Delta \varepsilon}.$$

Как и должно быть, это выражение стремится к постоянному пределу P при $\Delta p, \Delta \varepsilon \rightarrow 0$.

Поскольку величина γ_1 вообще не содержит особого интегрирования такого типа, как в уравнении (3), естественно предположить, что она, так же как и Γ_0 , остается конечной в пороговой точке.

Мы предположим также, что $\Gamma(p, q, p - q)$ вблизи порога имеет особенность только по первому аргументу. (Этим свойством обладает каждый член ряда рис. 2, а.) Все эти предположения должны быть проверены в дальнейшем.

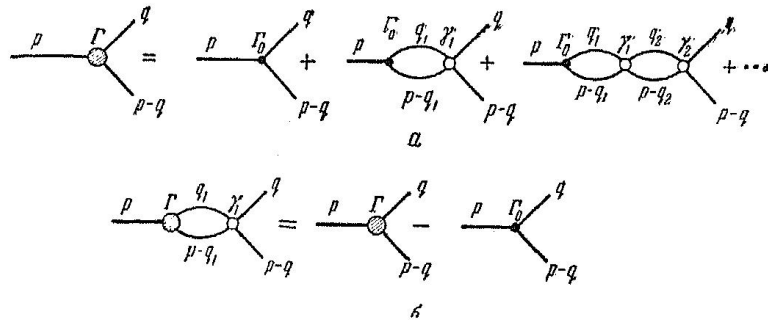


Рис. 2

Выделяя в (27), как обычно, при интегрировании по частоте ω_1 область $|\omega_1 - \Delta| \ll \Delta$ и производя интегрирование, получаем

$$\Gamma(p; q, p - q) - \Gamma_0(p; q, p - q) \approx \int \frac{\Gamma(p; q_1, p - q_1) \gamma_1(q_1, p - q_1; q, p - q)}{\varepsilon(q_1) + \varepsilon(|p - q_1|) - \varepsilon} d^3 q_1. \quad (28)$$

При интегрировании по q_1 мы выделим следующую область: $|q_1 - p_0| \ll p_0$, $||q_1 - p| - p_0| \ll p_0$. В этой области можно считать Γ и γ_1 не зависящими от q_1 . Учитывая, что в рассматриваемой области $\varepsilon(q_1)$ и $\varepsilon(|p - q_1|)$ имеют вид(2), получаем

$$\Gamma(p) - \Gamma_0(p) \approx \Gamma(p) \int \frac{d^3 q_1}{2\Delta - \varepsilon + (q_1 - p_0)^2 / 2\mu + (|q_1 - p| - p_0)^2 / 2\mu}. \quad (29)$$

(Напоминаем, что знак \approx означает равенство с точностью до регулярного коэффициента и регулярной добавки.)

Перейдем к цилиндрическим координатам q'_z, q'_ρ, φ по формулам (ось z вдоль p):

$$q_z = p_0 \cos \vartheta_1 + q'_z, \quad q_x = (p_0 \sin \vartheta_1 + q'_\rho) \cos \varphi, \quad q_y = (p_0 \sin \vartheta_1 + q'_\rho) \sin \varphi, \quad (30)$$

где угол ϑ_1 определяется равенством

$$2p_0 \cos \vartheta_1 = p. \quad (31)$$

Подставляя (30) в (29) и пренебрегая высшими степенями q'_z и q'_ρ , получаем

$$\Gamma(p) - \Gamma_0(p) \approx \Gamma(p) \int \frac{dq'_\rho dq'_z}{2\Delta - \varepsilon + (\sin^2 \vartheta_1 q'^2_\rho + \cos^2 \vartheta_1 q'^2_z) / \mu}$$

или, вводя полярные координаты r, ϕ

$$\begin{aligned} \sin \vartheta_1 q'_\rho / \sqrt{\mu} &= r \cos \phi, \quad \cos \vartheta_1 q'_z / \sqrt{\mu} = r \sin \phi, \\ \Gamma(p) - \Gamma_0(p) &\approx \Gamma(p) \int \frac{r dr}{2\Delta - \varepsilon + r^2} \approx \Gamma(p) \ln(2\Delta - \varepsilon). \end{aligned} \quad (32)$$

Из (32) находим $\Gamma(p)$ при $|2\Delta - \varepsilon| \ll \Delta$:

$$\begin{aligned} \Gamma(p; q, p - q) &= P \left[1 + Q \ln \frac{2\Delta - \varepsilon}{\alpha} \right]^{-1} \approx \frac{P}{Q} \left[\ln \frac{2\Delta - \varepsilon}{\alpha} \right]^{-1} - \\ &\quad - \frac{P}{Q^2} \left[\ln \frac{2\Delta - \varepsilon}{\alpha} \right]^{-2}, \end{aligned} \quad (33)$$

где P и Q — функции, не имеющие особенности при $\varepsilon = 2\Delta$. Выражение (33) для Γ нужно подставить в уравнение (3) для определения $G(p)$. Интегрирование в (3) оказывается полностью аналогичным интегрированию в (27) и дает член, пропорциональный $\ln \frac{2\Delta - \varepsilon}{\alpha}$. Таким образом,

$$G^{-1} \sim [\ln(2\Delta - \varepsilon) + B'] \left[1 + Q \ln \frac{2\Delta - \varepsilon}{\alpha} \right]^{-1} \propto \left(\ln \frac{2\Delta - \varepsilon}{\alpha} \right)^{-1}. \quad (34)$$

Окончательно, учитывая, что по предположению $G^{-1}(p_c) = 0$, находим

$$G^{-1}(p) = A_1^{-1} \left[(p - p_c) - a \left(\ln \frac{2\Delta - \varepsilon}{\alpha} \right)^{-1} \right]. \quad (35)$$

Таким образом, в этом случае при $p < p_c$ спектр имеет вид

$$\varepsilon(p) = 2\Delta - \alpha e^{-a/(p-p_c)}. \quad (36)$$

И в этом случае кривая $\varepsilon(p)$ оканчивается в точке $p = p_c$, причем она имеет в этой точке горизонтальную касательную бесконечного порядка.

Зная гриновскую функцию, легко проверить сделанное при решении уравнения (27) предположение о конечности вершинной части γ_1 в пороговой точке.

Отметим, что во всех рассмотренных случаях гриновская функция имеет при $\varepsilon = \varepsilon_c$, $p = p_c$ точку ветвления.

Имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные не позволяют однозначно решить вопрос о том, каким способом оканчивается фононный спектр в He^4 . Вероятно, здесь имеет место или испускание фонона с нулевым импульсом (случай а) или распад на два ротона с $\varepsilon = \Delta$ (случай в).

3. Неупругое рассеяние нейтронов с рождением возбуждений вблизи порога распада

Наиболее эффективным методом исследования спектров возбуждений является неупругое рассеяние нейтронов. В связи с этим мы кратко рассмотрим вопрос о вероятности неупругого рассеяния нейтронов с потерей энергии нейтроном $\varepsilon \approx \varepsilon_c$ и с потерей импульса $p \approx p_c$, т. е. с рождением возбуждений с энергией вблизи порога их распада.

При неупругом рассеянии нейтронов должны выполняться законы сохранения энергии и импульса

$$P_1^2/2m = P_2^2/2m + \varepsilon, \quad (37)$$

$$p = P_1 - P_2, \quad (38)$$

где m — масса нейтрона, ε и p — энергия и импульс рожденных нейтроном возбуждений, P_1 и P_2 — соответственно начальный и конечный импульсы нейтрона. Возводя (38) в квадрат, получаем

$$p^2 = 2m(E_1 + E_2 - 2\sqrt{E_1 E_2} \cos \varphi), \quad (39)$$

где E_1 и E_2 — энергии нейтрона до и после рассеяния, φ — угол рассеяния. При $p \approx p_c$, $\varepsilon \approx \varepsilon_c$ нейтроны рассеиваются на углы $\varphi \approx \varphi_c$, где φ_c определяется уравнением

$$p_c^2 = 2m(2E_1 - \varepsilon_c - 2\sqrt{E_1(E_1 - \varepsilon_c)} \cos \varphi_c). \quad (40)$$

При этом передача энергии, импульса и угол рассеяния связаны уравнением, следующим из (39) и (40)

$$p - p_c = \frac{m}{p_c} \left[\left(\sqrt{\frac{E_1}{E_1 - \varepsilon_c}} \cos \varphi_c - 1 \right) (E_1 - E_2 - \varepsilon_c) + \sqrt{E_1(E_1 - \varepsilon_c)} \sin \varphi_c (\varphi - \varphi_c) \right] = \\ = \beta \varphi' + \gamma \varepsilon' \quad (\varphi' = \varphi - \varphi_c, \quad \varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_c). \quad (41)$$

Если передача импульса p близка к порогу рождения фонона, то при $p < p_c$ распределение рассеянных нейтронов имеет резкую линию и при $p \rightarrow p_c$ интенсивность этой линии не имеет какой-либо особенности. При $p > p_c$ линия начинает расширяться пропорционально $(p - p_c)^3$. Распределение рассеянных нейтронов в этом случае имеет вид

$$dw = c \frac{\alpha\pi (\beta\varphi' + v\varepsilon')^3}{[\varepsilon'(1 - v\varepsilon) - \beta c\varphi']^2 + \alpha^2\pi^2 (\beta\varphi' + v\varepsilon')^6} d\varphi' d\varepsilon'. \quad (42)$$

Перейдем к рассеянию с рождением возбуждений вблизи порога распада на два возбуждения с конечными импульсами. Для определенности будем иметь в виду третий тип распада. В этом случае при $\varepsilon < 2\Delta$ будет рождаться одно возбуждение, а при $\varepsilon > 2\Delta$ — два возбуждения с энергией $\geq \Delta$ каждое. Графически эти процессы представлены на рис. 3. Здесь волнистая

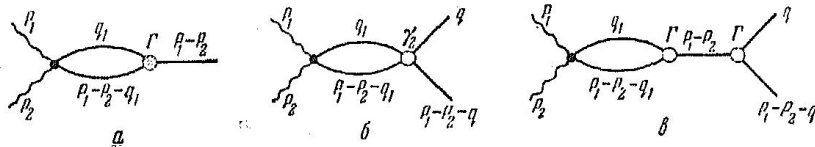


Рис. 3

линия соответствует свободному нейтрону, точка $V(p_1, p_2; q, p_1 - p_2 - q)$ обозначает амплитуду рассеяния нейтрона на свободном атоме, через $\gamma_2(q_1, p - q; q, p - q)$ обозначена совокупность всех четырехчастичных вершинных графиков, которые нельзя разделить между концами $q_1, p - q_1$ и $q, p - q$ на две части, соединенные лишь одной линией. При этом мы учли, что взаимодействие свободного нейтрона с атомом всегда можно считать слабым, поэтому мы пренебрегли всеми графиками, где вершина V встречается два и более раз.

При $\varepsilon < 2\Delta$, когда может родиться только одно возбуждение, ε и p связаны уравнением (36), которое вместе с уравнением (41), в которое подставлено $\varepsilon_c = 2\Delta$, определяет потерю энергии нейтроном в зависимости от угла рассеяния

$$E_1 - E_2 - 2\Delta = \alpha e^{-a'/(q_c - \varphi)}, \quad a' = \alpha p_c / m \sqrt{E_1(E_1 - 2\Delta)} \sin \varphi_c. \quad (43)$$

Вероятность рассеяния нейтрона в интервале импульсов дается выражением

$$dw = 2\pi |N_1 M|^2 \delta(E_2 + \varepsilon - E_1) d^3P_2 / (2\pi)^3. \quad (44)$$

Здесь $M(p_1, p_2, p_1 - p_2)$ — матричный элемент, соответствующий по обычным правилам графику рис. 3, а, N_1 — постоянная перенормировки, равная корню квадратному из взятого с обратным знаком вычета гриновской функции рождающегося возбуждения в точке, соответствующей энергии возбуждения. (Такой перенормировочный множитель нужно писать для каждого свободного конца графика.) Из (35) находим

$$N_1 = \sqrt{\frac{A(2\Delta - \varepsilon)}{a}} \left[-\ln \frac{2\Delta - \varepsilon}{\alpha} \right]. \quad (45)$$

Что касается матричного элемента M , то он при стремлении ε к 2Δ стремится к постоянному пределу, так как логарифм, возникающий из-за интегрирования по q (см. рис. 3, а), сокращается с логарифмом из знаменателя $\Gamma(V, \text{разумеется, не имеет особенности})$. Поэтому поведение dw определяется поведением N_1 и распределение нейтронов по углам (при $\varphi \ll \varphi_0$) имеет вид

$$dw = C_1 (\varphi_c - \varphi)^{-2} e^{-a'/(q_c - \varphi)} d\varphi. \quad (46)$$

Таким образом, вероятность рождения возбуждения при $\varphi \rightarrow \varphi_c$ быстро стремится к нулю.

Перейдем теперь к рассеянию нейтронов с передачей энергии большей чем 2Δ . Вероятность рассеяния в этом случае имеет вид

$$d\omega = 2\pi |N_2^2 M_2|^2 \delta(E_2 + \varepsilon - E_1) \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}. \quad (47)$$

Здесь M_2 — сумма матричных элементов, соответствующих графикам рис. 3, б и 3, в. Теперь нормировочные множители N_2 , относящиеся к возбуждениям с энергией вблизи Δ , не имеют особенности. Матричный элемент графика рис. 3 б также не имеет особенности, так как вершина γ_2 подобно Γ , как легко убедиться, имеет множитель $[\ln(2\Delta - \varepsilon)]^{-1}$, который сокращается с интегралом по q_1 . Поэтому особенность M_2 дается графиком рис. 3 в. Матричный элемент этого графика имеет максимум при $\varphi < \varphi_c$ и дает в этой области главный вклад в рассеяние. Соответствующая вероятность имеет вид

$$d\omega = 2\pi \left| \int V(P_1, P_2, q_1, P_1 - P_2 - q_1) G(q_1) G(P_1 - P_2 - q_1) \times \right. \\ \left. \times \Gamma(q_1, P_1 - P_2 - q_1, P_1 - P_2) \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \right|^2 N_2^4 |\Gamma(P_1 - P_2; q, P_1 - P_2 - q) G(P_1 - P_2)|^2 \times \\ \times \delta(E_2 + \varepsilon - E_1) \frac{d^3 P_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}. \quad (48)$$

Особенность M_2 содержится в члене с произведением ΓG . Производя интегрирование по q и используя (33) и (35), получаем

$$d\omega = C_2 d\varphi dE_2 \left\{ \left[a - (p - p_c) \ln \left| \frac{2\Delta - E_1 + E_2}{\alpha} \right| \right]^2 + \pi^2 (p - q_c)^2 \right\}^{-1}. \quad (49)$$

Подставляя в (49) выражение (41), получаем распределение рассеянных нейтронов по углам и энергиям

$$d\omega = C_2 d\varepsilon' d\varphi' \left\{ \left[a - \beta\varphi' \ln \left| \frac{\varepsilon'}{\alpha} \right| \right]^2 + \pi^2 \varphi'^2 \beta^2 \right\}^{-1}. \quad (50)$$

Опишем качественно картину рассеяния нейтронов в этом случае. При $\varphi < \varphi_c$ имеется резкая линия, соответствующая рождению одного ротона, причем ее интенсивность стремится к нулю при $\varphi \rightarrow \varphi_c$. Рождение двух ротонов приводит к сплошному спектру рассеянных нейтронов, причем интенсивность рассеяния имеет минимум при $\varepsilon = 2\Delta$ и в случае $\varphi < \varphi_c$ размытый максимум при

$$\varepsilon' = \alpha e^{-a/(\varphi_c - \varphi)}.$$

Вычисления для случая распада на два возбуждения с параллельными импульсами (случай б) аналогичны. Мы приведем лишь окончательные формулы. Вероятность рассеяния с потерей энергии $\varepsilon < \varepsilon_c$ равна

$$d\omega = C_1 \sqrt{\varphi_c - \varphi} d\varphi. \quad (51)$$

Вероятность рассеяния с $\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_c > 0$ имеет вид

$$d\omega = C_2 d\varepsilon' d\varphi' \left[(a + v_c) \varepsilon' + b \sqrt{(v_c v - 1) \varepsilon' - \beta\varphi'} \right]^{-2} \text{ при } (v_c v - 1) \varepsilon' - \beta\varphi' > 0, \quad (52)$$

$$d\omega = C_2 d\varepsilon' d\varphi' \left\{ (a + v_c)^2 \varepsilon'^2 + b^2 [(v_c v - 1) \varepsilon' - \beta\varphi'] \right\}^{-1} \text{ при } (v_c v - 1) \varepsilon' - \beta\varphi' < 0.$$

В данной работе не исследовался случай, когда порог распада на три возбуждения лежит ниже, чем порог распада на два. Хотя логически такая возможность и существует, она представляется маловероятной.

Все наше исследование, разумеется, относится не только к фононному спектру жидкого He^4 , но и к любой бозевской ветви возбуждений в конденсированных телах. При этом, однако, если взаимодействие, приводящее к распаду возбуждений, является слабым, то все описанные особенности будут проявляться лишь в очень малом интервале импульсов вблизи p_c , что может затруднить их экспериментальное выявление. Следует также иметь в виду, что в случаях а и б при слабом взаимодействии кривая спектра после небольшого разрыва может вновь продолжаться с затуханием. Кроме того, в случае кристаллов картина будет сильно усложняться анизотропией.

В заключение автор выражает благодарность акад. Л. Д. Ландау за ценные советы в процессе работы и В. М. Галицкому, Л. П. Горькову и И. Е. Дзялошинскому за полезное обсуждение.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6 октября 1958 г.

Литература

- [1] Л. Д. Ландау, [Е. М.] Лифшиц. Статистическая физика, ГИТТЛ, 1951, гл. VI, стр. 225.
- [2] Н. Н. Боголюбов. Изв. АН СССР, серия физич., 11, 67, 1947.
- [3] С. Т. Беляев. ЖЭТФ, 34, 433, 1958.
- [4] С. Т. Беляев. ЖЭТФ, 34, 417, 1958.
- [5] С. Швебер, Г. Бете, Ф. Гофман. Мезоны и поля, т. I, ИИЛ, 1957, гл. 24, стр. 381.

ON THE PROPERTIES OF ELEMENTARY EXCITATION SPECTRUM NEAR THE DISINTEGRATION THRESHOLD OF THE EXCITATIONS

L. P. Pitayevsky

The singularity of the Bose fluid Green's function near the excitation disintegration threshold is investigated by quantum field theory methods without assuming weakness of the interaction. It is shown that three possible types of decay thresholds exist. In the first case the excitation velocity at the threshold point $p=p_c$ equals that of sound, thus starting from this point the excitation can produce phonons which results in damping proportional to $(p_c-p)^3$. In two other cases excitation in the threshold point can break up into two excitations with nonzero momenta which are either parallel to each other or form a definite angle. In both cases the spectrum curve ends at the threshold point, and the excitation velocity at this point is equal to that of each of the excitations produced in the decay. Scattering of neutrons in the liquid involving the production of excitations near the threshold is considered.