

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА МОДЕЛИ ГЛАВНОГО КИРАЛЬНОГО ПОЛЯ ГРУППЫ $SU(2)$ НА ПОЛУОСИ

*В. В. Киселев**

*Институт физики металлов им. М. Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук
620108, Екатеринбург, Россия*

*Физико-технологический институт Уральского федерального университета
620002, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 27 ноября 2025 г.,
после переработки 27 ноября 2025 г.
Принята к публикации 30 ноября 2025 г.

В рамках модели главного кирального поля на группе $SU(2)$ методом обратной задачи рассеяния исследована нелинейная динамика солитонов и диспергирующих волн полуограниченного неупорядоченного ферритмагнетика. Учитывались краевые условия, соответствующие свободным спином на поверхности образца и однородному распределению намагниченности в его глубине. Показано, что ядра солитонов сильно изменяются в ходе их взаимодействия с границей образца. После столкновения с поверхностью по мере продвижения в глубь образца солитоны восстанавливают стационарную форму, типичную для прецессирующих солитонов безграничной среды. Вычислены сдвиги положений и начальных фаз прецессий солитонов после их отражения от края образца. Аналитически описано взаимодействие солитона со стоячей волной намагниченности в полуограниченном образце. Волна вызывает амплитудную и фазовую модуляции солитона. При достаточно большой амплитуде она «разрушает» солитон.

Ключевые слова: *Неупорядоченный ферритмагнетик, солитон, метод обратной задачи рассеяния, отражение от границы, модель главного кирального поля*

DOI: 10.31857/S3034641X26010077

1. ВВЕДЕНИЕ

В феноменологической теории Ландау – Лифшица [1–4] сложные магнитные структуры рассматриваются как совокупность встроенных друг в друга магнитных подрешеток. Каждая подрешетка характеризуется вектором плотности магнитного момента постоянной длины. Эволюция векторов носит характер прецессии вокруг эффективных полей, которые определяются из разложения энергии среды по компонентам намагниченностей подрешеток и их производных по пространственным координатам. Хотя для простых магнитных структур при низких температурах эти предположения приводят к верным выводам, для них, строго говоря, нет убедительных обоснований. В работах [5–10] предложена альтернативная макроскопическая теория, основанная

на общих соображениях симметрии, не привлекающая представления о магнитных подрешетках, которое часто бывает избыточным и усложняет теоретическое описание нелинейной динамики магнитных сред. Новый подход с равным успехом применим как к кристаллам, так и к неупорядоченным магнетикам при условии, что формирование магнитных структур обусловлено главным образом изотропными обменными взаимодействиями как наиболее сильными по сравнению с магнитоанизотропными взаимодействиями. Любая равновесная обменная структура может быть охарактеризована не более чем тремя взаимно ортогональными магнитными векторами. Теоретико-групповой анализ взаимодействия голдстоуновских мод, стремящихся восстановить в системе симметрию относительно вращений в спиновом пространстве всех спиновых моментов атомов кристалла (спонтанно нарушенную из-за образования равновесной магнитной структуры), дает уравнения нелинейной динамики спиновых волн с наименьшей энергией возбуждения. В зависимо-

* E-mail: kiseliev@imp.uran.ru

сти от подгруппы инвариантности основного состояния магнетика, в спектре возбуждений имеются одна, либо две или три голдстоуновские ветви спиновых волн. Три ветви появляются в случае максимального нарушения обменной симметрии основного состояния.

Хотя уравнения метода феноменологических лагранжианов спиновых волн [5–10] проще уравнений Ландау–Лифшица, новый подход в области своей применимости согласуется с прежним [11]. Он особенно плодотворен для описания многоподрешеточных магнетиков, для которых традиционный подход сталкивается со значительными трудностями из-за большого числа векторов намагниченности подрешеток и сильных геометрической и физической нелинейностей уравнений Ландау–Лифшица.

В рамках данной макроскопической теории для магнитных возбуждений, зависящих от одной пространственной координаты x и времени t , выявлены полностью интегрируемые нелинейные уравнения. Каждое из них эквивалентно условию совместности системы линейных дифференциальных уравнений для вспомогательных матричных функций Йоста. Операторы системы содержат комбинации голдстоуновских полей магнонов и их производных по x и t с коэффициентами, зависящими от дополнительного спектрального параметра λ . Наличие такого представления (U – V -пары) позволяет перейти от исходных полевых переменных к новым обобщенным переменным — данным рассеяния вспомогательной системы. В новых переменных исходное нелинейное уравнение распадается на ряд незацепляющихся линейных уравнений, которые легко интегрируются. Обратное спектральное преобразование (метод обратной задачи рассеяния) дает полное решение задачи Коши на интервале $-\infty < x < \infty$ для рассматриваемой нелинейной модели.

С помощью метода обратной задачи рассеяния впервые удалось аналитически описать квазиодномерные солитоны в многоподрешеточных неколлинеарных ферри- и антиферромагнетиках, в спиновом стекле, неупорядоченных ферримагнетиках, а также исследовать «разрушение» солитонов бегущими волнами намагниченности большой амплитуды. Наиболее полное изложение полученных результатов содержится в монографии [11].

К сожалению, метод обратной задачи рассеяния хорошо развит только для неограниченных образцов. Аналитическое описание нелинейной динамики конечных систем связано с большими трудностями из-за отсутствия простого отображения начально-краевых условий исходной задачи в данные рассея-

ния вспомогательной линейной системы. Исключение составляют задачи на полуоси ($0 < x < \infty$) с выделенным классом граничных условий, которые называют интегрируемыми [12–15]. Для интегрируемых уравнений Ландау–Лифшица полубесконечного ферромагнетика с разными типами объемной кристаллографической анизотропии и физически мотивированными краевыми условиями в работах [16–19] предложена специальная композиция обратного спектрального преобразования и «метода изображений», используемого в электростатике при решении линейных краевых задач с определенной пространственной симметрией. В контексте метода изображений описание взаимодействия солитонов и волн в образце (при $0 < x < \infty$) оказывается эквивалентным анализу взаимодействия реального распределения намагниченности в образце с фиктивным волновым полем вне его. Симметрия продолжения задачи на всю ось $-\infty < x < \infty$ приводит к дополнительным ограничениям на выбор данных рассеяния. В частности, их число удваивается. Солитоны полуограниченных ферромагнетиков приобретают особые свойства, которые полезны для приложений и отсутствуют у солитонов неограниченной среды [20].

Важно, что предложенная техника допускает обобщения и позволяет исследовать решения «гидродинамических» уравнений для полубесконечных магнетиков со сложной обменной структурой. В данной работе мы изучим солитоны и диспергирующие волны в неупорядоченном ферримагнетике с незакрепленными на границе спинами. В этом случае описание квазиодномерных возбуждений сводится к проблеме интегрирования уравнений главного кирального поля [10, 11] группы $SU(2)$ на полуоси $0 < x < \infty$:

$$\partial_t \omega_{l,t} - \partial_x \omega_{l,x} = 0, \quad (1)$$

$$\partial_t \omega_{l,x} - \partial_x \omega_{l,t} + \varepsilon_{lnm} \omega_{n,t} \omega_{m,x} = 0. \quad (2)$$

Здесь латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, по дважды встречающимся индексам проводится суммирование, ε_{lnm} — абсолютно антисимметричный единичный тензор ($\varepsilon_{123} = 1$). Мы используем безразмерные переменные, в которых пространственная координата x измеряется в единицах обменной длины l_0 , а время — в единицах l_0/c , где c — максимальная групповая скорость спиновых волн. В безразмерных переменных эта скорость равна единице. Уравнение (1) представляет закон сохранения спинового момента, записанный в подвижном репере спинового пространства, который жестко связан

с ортогональными магнитными векторами обменной структуры. Величины $\omega_{l,t}(x,t)$ и $-\omega_{l,x}(x,t)$ определяют плотность спинового момента и его поток. Они совпадают с дифференциальными формами Картана, которые для дальнейшего анализа удобно выразить через матрицы $g(x,t) \in \text{SU}(2)$ [11] ($g^\dagger g = I$, $\det g = 1$, I — единичная матрица):

$$\frac{i}{2} \sigma_l \omega_{l,\mu} = \partial_\mu g g^\dagger, \quad \mu = x, t, \quad (3)$$

где символ «†» обозначает операцию эрмитового сопряжения, σ_l — матрицы Паули. Уравнение (2) определяет дифференциальную структуру (3) форм Картана.

В малых областях ферромагнетика в подвижном репере сохраняется идеальная обменная структура. При переходе к неподвижному базису спинового пространства идеальная обменная структура поворачивается как единое целое с течением времени при переходе от одной области координатного пространства к другой. Повороты задает матрица $D(x,t) \in \text{SO}(3)$ ($D^T D = I$, $\det D = 1$), которая выражается через $g(x,t)$ [11]:

$$g^\dagger \sigma_p g = \sigma_k D_{kp}. \quad (4)$$

Здесь верхний индекс «Т» обозначает операцию транспонирования.

С помощью формул (3), (4) нетрудно убедиться, что закон сохранения спинового момента среды в лабораторной системе координат имеет вид

$$\partial_t [D_{kn} \omega_{n,t}] - \partial_x [D_{kn} \omega_{n,x}] = 0, \quad 0 < x < \infty.$$

В случае свободных краевых спинов поток спинового момента $-D_{kn} \omega_{n,x}$ через поверхность $x = 0$ образца должен обращаться в нуль. Отсюда получаем первое краевое условие

$$\omega_{n,x}(x,t)|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

или, что эквивалентно,

$$\partial_x g(x,t)|_{x=0} = 0. \quad (6)$$

Согласно законам квантовой механики вектор плотности спинового момента $D_{kn} \omega_{n,t}$ отличается от намагниченности M_k среды только множителем $-\hbar\gamma$:

$$M_k \sigma_k = -\hbar\gamma \sigma_k D_{kn} \omega_{n,t} = 2i\hbar\gamma g^\dagger \partial_t g, \quad (7)$$

где \hbar — постоянная Планка, γ — гиромагнитное отношение. При переходе к правой части равенства (7) использованы формулы (3), (4).

Уравнения (1), (2) инвариантны относительно преобразований Лоренца, поэтому более информативны в конусных переменных $\xi = (t+x)/2$, $\eta = (t-x)/2$. Перепишем формы Картана в переменных ξ, η ,

$$\omega_{n,\xi} = \omega_{n,t} + \omega_{n,x}, \quad \omega_{n,\eta} = \omega_{n,t} - \omega_{n,x},$$

и введем векторные поля

$$2u_k = \omega_{k,\xi}, \quad 2v_k = \omega_{k,\eta}. \quad (8)$$

Тогда система (1), (2) примет вид

$$\partial_\eta \mathbf{u} = [\mathbf{u} \times \mathbf{v}], \quad \partial_\xi \mathbf{v} = [\mathbf{v} \times \mathbf{u}]. \quad (9)$$

Отсюда следует, что длина вектора \mathbf{u} не зависит от η , а длина вектора \mathbf{v} не зависит от ξ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0^2(\xi), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0^2(\eta). \quad (10)$$

Это — проявление высокой пространственно-временной симметрии неупорядоченного ферромагнетика. Для правильного определения энергии системы следует удовлетворить связям (10) и ввести независимые поля. Полный учет нормировки (10) выполним позднее, а пока для упрощения формул примем, что векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} имеют единичную длину, и воспользуемся параметризацией

$$\mathbf{u} = (\sin \theta_1 \cos \varphi_1, \sin \theta_1 \sin \varphi_1, \cos \theta_1), \\ \mathbf{v} = (\sin \theta_2 \cos \varphi_2, \sin \theta_2 \sin \varphi_2, \cos \theta_2),$$

в которой плотность функции Лагранжа для уравнений (9) имеет вид

$$L = (1 - \cos \theta_1)(\partial_t - \partial_x)\varphi_1 + (1 - \cos \theta_2)(\partial_t + \partial_x)\varphi_2 - \\ - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos \theta_1 \cos \theta_2.$$

Отсюда стандартной процедурой [21, 22] находим обобщенные импульсы

$$p_{1,2} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \varphi_{1,2})} = 1 - \cos \theta_{1,2}$$

и плотность энергии

$$H = \sum_{i=1}^2 p_i \partial_t \varphi_i - L = (1 - \cos \theta_1) \partial_x \varphi_1 - (1 - \cos \theta_2) \partial_x \varphi_2 + \\ + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2.$$

Возвращаясь к полям \mathbf{u}, \mathbf{v} , получаем следующее выражения для энергии системы:

$$E = \int_0^\infty dx \left[\frac{u_1 \partial_x u_2 - u_2 \partial_x u_1}{1 + u_3} - \frac{v_1 \partial_x v_2 - v_2 \partial_x v_1}{1 + v_3} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 1 \right]. \quad (11)$$

Будем искать решения уравнений (1), (2) ферри-магнетика со следующим асимптотическим поведе-нием на бесконечности:

$$\begin{aligned} (\omega_{1,t}, \omega_{2,t}, \omega_{3,t}) &\rightarrow 2(0, 0, 1), \\ (\omega_{1,x}, \omega_{2,x}, \omega_{3,x}) &\rightarrow 0 \\ \text{при } x &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что в глубине образца

$$g(x, t) \rightarrow g_0(t) = \exp[i\sigma_3 t] \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Асимптотические условия (12), (13) соответствуют однородному распределению намагниченности:

$$\mathbf{M}(x, t) \rightarrow -2\hbar\gamma(0, 0, 1) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (14)$$

В формуле (11) энергия образца отсчитывается от однородного распределения намагниченности в его глубине, где $x \rightarrow \infty$.

Для уравнений ферримагнетика начальные условия

$$\omega_{k,x}|_{t=0} = e_k(x), \quad \omega_{k,t}|_{t=0} = f_k(x) \quad (0 < x < \infty) \quad (15)$$

должны быть согласованы с краевыми условиями (5), (12).

В разд. 2 мы покажем, что начально-краевая задача (1), (2), (5), (12), (15) может быть продолжена по определенной симметрии с полуоси $0 < x < \infty$ на всю ось. После этого ее решение достигается специальной модификацией метода обратной задачи рассеяния на интервале $-\infty < x < \infty$. Для этого в разд. 2 установлены трансформационные и аналитические свойства фундаментальных решений вспомогательной линейной системы. Спектральные данные этой системы использованы для восстановления методами теории функций комплексной переменной решений исходной начально-краевой задачи для неупорядоченного ферримагнетика.

В разд. 3 показано, что анализ слабонелинейной динамики диспергирующих спин-волновых цугов сводится к решению линейных интегральных уравнений.

В разд. 4 найдены и изучены частицеподобные солитоны на фоне однородного основного состояния полуограниченного неупорядоченного ферримагнетика. Они образуются только при сильных внешних воздействиях и не имеют аналогов в слабонелинейной теории. Кроме того, получены решения, которые описывают нелинейную интерференцию солитонов и двух волн намагниченности большой амплитуды — падающей на границу образца и отраженной от нее.

В разд. 5 получены спектральные разложения интегралов движения неупорядоченного ферримагнетика на полуоси со свободными краевыми спинами и однородным основным состоянием в глубине образца.

2. МЕТОД ИЗОБРАЖЕНИЙ И ОБРАТНОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Напомним ключевые соотношения метода интегрирования уравнений главного кирального поля на интервале $-\infty < x < \infty$. Будем обозначать матрицы кирального поля и формы Картана на этом интервале не строчными, как ранее на полуоси, а прописными буквами:

$$G(x, t) \in \text{SU}(2), \quad \partial_\mu G G^\dagger = \frac{i}{2} \sigma_k \Omega_{k,\mu}, \quad \mu = x, t.$$

Квазиодномерным возбуждениям безграничного неупорядоченного ферримагнетика соответствуют решения уравнений

$$\begin{aligned} \partial_t \Omega_{l,t} - \partial_x \Omega_{l,x} &= 0, \\ \partial_t \Omega_{l,x} - \partial_x \Omega_{l,t} + \varepsilon_{lnm} \Omega_{n,t} \Omega_{m,x} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

с асимптотическим поведением при $|x| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} (\Omega_{1,t}, \Omega_{2,t}, \Omega_{3,t}) &\rightarrow 2(0, 0, 1), \\ (\Omega_{1,x}, \Omega_{2,x}, \Omega_{3,x}) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (17)$$

и начальными условиями

$$\Omega_{l,x}|_{t=0} = E(x), \quad \Omega_{l,t}|_{t=0} = F(x). \quad (18)$$

Значения функций $E(x)$ и $F(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$ согласованы с формулами (17).

Когда матричная функция голдстоуновских полей $G(x, t)$ нужное число раз дифференцируема по x и t , нелинейные уравнения (16) эквивалентны условию совместности

$$[\partial_x - U, \partial_t - V] = 0 \quad (19)$$

системы линейных дифференциальных уравнений для вспомогательной матричной функции $\chi(x, t, \lambda)$ порядка 2×2 :

$$\begin{aligned} \partial_x \chi &= \frac{i}{2} \left[-\frac{\lambda \Omega_{k,t}}{1-\lambda^2} + \frac{\Omega_{k,x}}{1-\lambda^2} \right] \sigma_k \chi \equiv U \chi, \\ \partial_t \chi &= \frac{i}{2} \left[-\frac{\lambda \Omega_{k,x}}{1-\lambda^2} + \frac{\Omega_{k,t}}{1-\lambda^2} \right] \sigma_k \chi - \frac{i \chi \sigma_3}{1-\lambda^2} \equiv \\ &\equiv V \chi - \frac{i \chi \sigma_3}{1-\lambda^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

где σ_k — матрицы Паули ($k = 1, 2, 3$), λ — комплексный спектральный параметр.

Для включения начально-краевой задачи (1), (2), (5), (12), (15) в схему обратной задачи рассеяния продолжим киральное поле $g(x, t) \in \text{SU}(2)$ четным образом на весь интервал $-\infty < x < \infty$:

$$G(x, t) = \begin{cases} g(x, t), & 0 \leq x < \infty; \\ g(-x, t), & -\infty < x < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Продолжение (21) непрерывно в точке $x = 0$:

$$G(-0, t) = G(+0, t) = g(x = +0, t),$$

но его первая производная по пространственной координате в точке $x = 0$ имеет скачок:

$$\Omega_{l, x}|_{x=+0} - \Omega_{l, x}|_{x=-0} = 2\omega_{l, x}|_{x=+0}.$$

Это обстоятельство позволяет трактовать условие (5) как дополнительное ограничение на выбор киральных полей $G(x, t)$ и форм Картана:

$$\Delta\Omega_{l, t}|_{x=0} = 0, \quad \Delta\Omega_{l, x}|_{x=0} = 0, \quad (22)$$

где

$$\Delta f|_{x=0} = f(x = +0) - f(x = -0).$$

Важно, что при этом коммутационное представление (19) оказывается эквивалентно уравнениям (16) при $x \neq 0$ и дополнительному ограничению (22) в точке $x = 0$. Это позволяет включить задачу (1), (2), (5), (12), (15) для ферримагнетика на полуоси в традиционную схему обратной задачи рассеяния на всей оси $-\infty < x < \infty$. При ограничении (22) производные $\partial_t \chi$, $\partial_x \chi$ в уравнениях (20) будут непрерывны в точке $x = 0$.

Интегрирование уравнений полуограниченного неупорядоченного ферримагнетика достигается переходом к данным рассеяния вспомогательной системы:

$$\partial_x \chi = \frac{i}{2} \left[\frac{\lambda \Omega_{k, t}}{\lambda^2 - 1} - \frac{\Omega_{k, x}}{\lambda^2 - 1} \right] \sigma_k \chi. \quad (23)$$

Для этого введем ее базисные решения Йоста с асимптотическим поведением

$$\chi \rightarrow \exp\left(\frac{i\sigma_3 \lambda x}{\lambda^2 - 1}\right) \text{ при } x \rightarrow \pm\infty, \quad (24)$$

которые согласованы с поведением (12), (13) кирального поля $g(x, t)$ при $x \rightarrow \infty$. Заметим, что последнее слагаемое в правой части второго уравнения

(20) введено для сохранения асимптотических условий (24) при любых t . Ввиду бесследовости оператора U , матрицы $\chi_{\pm}(x, t, \lambda)$ унимодулярны:

$$\det \chi_{\pm}(x, t, \lambda) = 1.$$

Вещественная ось R комплексной плоскости λ соответствует непрерывному спектру вспомогательной линейной системы (23). На ней фундаментальные решения Йоста осциллируют и связаны между собой:

$$\chi_{-}(x, t, \lambda) = \chi_{+}(x, t, \lambda) T(\lambda, t), \quad \lambda \in R. \quad (25)$$

Матрица перехода T зависит только от спектрального параметра λ и времени t . Далее, где это не вызывает недоразумений, зависимость от t опускаем.

Дальнейшие построения близки к работам [16–19]. Потому, не останавливаясь на деталях, приведем основные результаты. Как и в безграничной среде, функции Йоста обладают свойством симметрии

$$\chi_{\pm}^*(x, \lambda^*) = \sigma_2 \chi_{\pm}(x, \lambda) \sigma_2, \quad (26)$$

где символ «*» обозначает комплексное сопряжение. Четность продолжения (21) порождает дополнительное ограничение:

$$\chi_{\pm}(x, \lambda) = \sigma_2 \chi_{\mp}^*(-x, -\lambda^*) \sigma_2. \quad (27)$$

Далее столбцы матриц χ_{\pm} будем нумеровать верхними индексами: $\chi_{\pm} = (\chi_{\pm}^{(1)}, \chi_{\pm}^{(2)})$. Векторные функции $\chi_{-}^{(1)}(\lambda)$ и $\chi_{+}^{(2)}(\lambda)$ аналитически продолжатся с вещественной λ -оси в область $\text{Im}\lambda > 0$, а столбцы $\chi_{+}^{(1)}(\lambda)$ и $\chi_{-}^{(2)}(\lambda)$ будут аналитическими функциями в нижней полуплоскости $\text{Im}\lambda < 0$.

Редукции (26), (27) также могут быть продолжены в области аналитичности соответствующих столбцов матриц Йоста. Они конкретизируют алгебраическую структуру матрицы перехода:

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & -\bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad a(\lambda)\bar{a}(\lambda) + b(\lambda)\bar{b}(\lambda) = 1; \\ a(\lambda) = a^*(-\lambda^*), \quad \text{Im}\lambda > 0, \quad \bar{a}(\lambda) = a^*(\lambda^*), \quad \text{Im}\lambda < 0; \\ b(\lambda) = -b(-\lambda) = \bar{b}^*(\lambda), \quad \lambda \in R. \quad (28)$$

Здесь мы учли, что матричные элементы $a(\lambda)$ и $\bar{a}(\lambda)$ допускают представления

$$a(\lambda) = \det(\chi_{-}^{(1)}(\lambda), \chi_{+}^{(2)}(\lambda)), \\ \bar{a}(\lambda) = \det(\chi_{+}^{(1)}(\lambda), \chi_{-}^{(2)}(\lambda)), \quad (29)$$

а значит, могут быть продолжены с контура R в области $\text{Im}\lambda > 0$ и $\text{Im}\lambda < 0$ соответственно.

Спектральные функции $b(\lambda)$ и $\bar{b}(\lambda)$ не обладают какими-либо свойствами аналитичности и определены только на R .

В области своей аналитичности функции $a(\lambda)$ и $\bar{a}(\lambda)$ могут иметь нули, которые будем предполагать простыми. Если $\lambda = \lambda_j \in \text{Im}\lambda > 0$ — нуль функции $a(\lambda)$, то, ввиду редукций (28), $\lambda = \lambda_j^* \in \text{Im}\lambda < 0$ будет нулем функции $\bar{a}(\lambda)$. Согласно (29), в точках $\lambda = \lambda_j$, где $a(\lambda_j) = 0$, столбцы $\chi_-^{(1)}(x, \lambda_j)$ и $\chi_+^{(2)}(x, \lambda_j)$ пропорциональны:

$$\chi_-^{(1)}(x, \lambda_j) = c(\lambda_j) \chi_+^{(2)}(x, \lambda_j). \quad (30)$$

Поскольку формулы (30) определяют экспоненциально убывающие при $|x| \rightarrow \infty$ решения системы (23), множество $\{\lambda_j\}$ соответствует дискретному спектру системы (23).

Редукции (26), (27) объединяют нули λ_j и нормировочные множители $c(\lambda_j)$ в пары:

$$\{\lambda_j\} = \{\lambda_k, -\lambda_k^*\}, \quad \{c(\lambda_j)\} = \{c(\lambda_k), -1/c^*(\lambda_k)\}, \\ k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, 2N. \quad (31)$$

Для дальнейшего анализа потребуются асимптотические разложения функций Йоста вблизи особой точки $\lambda = 1$ вспомогательной системы (23). Как и в работах [16–19], при $x > 0$ матричная функция $\chi_+(x, t)$ допускает представление

$$\chi_+(x, \lambda) = (I + \Phi(x, \lambda)) \exp \left[\frac{i\sigma_3 \lambda x}{\lambda^2 - 1} + Z(x, \lambda) \right], \quad (32)$$

где

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_n^*(x) \\ \omega_n(x) & 0 \end{pmatrix}, \\ Z(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \zeta(x, \lambda) & 0 \\ 0 & \zeta^*(x, \lambda) \end{pmatrix}, \\ \omega(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(x) (\lambda - 1)^n, \\ \zeta(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n(x) (\lambda - 1)^n.$$

Коэффициенты разложения $\omega_n(x)$, $\zeta_n(x)$ находятся из (23) рекуррентной процедурой. Приведем первые из них:

$$\omega_0 = \frac{v_1 + i v_2}{1 + v_3}, \\ \zeta_0 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + v_3}{2} \right) - \\ - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^x dx' \left[-\frac{(v_1 \partial_{x'} v_2 - v_2 \partial_{x'} v_1)}{1 + v_3} + \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 1) \right]. \quad (33)$$

Разложение функции $\chi_-(x, \lambda)$ вблизи особой точки $\lambda = 1$ при $x < 0$ получается из разложения $\chi_+(x, \lambda)$ при $x > 0$ формальной заменой

$$g(x, t) \rightarrow g(-x, t), \quad \int_{-\infty}^x dx' \rightarrow \int_{-\infty}^x dx'. \quad (34)$$

Поскольку функции $\chi_{\pm}(x, \lambda)$ непрерывны в точке $x = 0$, существует полезное представление матрицы перехода:

$$T(\lambda) = \chi_+^{-1}(x = 0, \lambda) \chi_-(x = 0, \lambda). \quad (35)$$

Формулы (20), (24), (13) и редукции (26), (27) приводят к соотношениям

$$\chi_{\pm}(x, \lambda) \rightarrow I \text{ при } \lambda \rightarrow \infty, \\ \chi_+(x = 0, \lambda = 0) = \chi_-(x = 0, \lambda = 0), \\ \chi_{\pm}(x, t, \lambda = 0) g_0(t) = G(x, t). \quad (36)$$

Тогда из представления (35) получаем

$$a(\lambda = \infty) = a(\lambda = 0) = 1, \\ b(\lambda = \infty) = b(\lambda = 0) = 0. \quad (37)$$

Явный вид аналитической функции $a(\lambda)$ восстанавливается по ее нулям в области $\text{Im}\lambda > 0$, асимптотическому поведению (37) и коэффициенту отражения $b(\lambda)$ [11, 23]:

$$a(\lambda) = \prod_{k=1}^N \frac{(\lambda - \lambda_k)(\lambda + \lambda_k^*)}{(\lambda - \lambda_k^*)(\lambda + \lambda_k)} \times \\ \times \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{\ln[1 - |b(\mu)|^2]}{(\mu - \lambda)} \right), \quad \text{Im}\lambda > 0. \quad (38)$$

Дискретные нули $\{\lambda_j\}$ функции $a(\lambda)$, нормировочные множители $\{c(\lambda_j)\}$ и спектральные плотности $b(\lambda)$ ($\lambda \in R$) образуют набор новых обобщенных переменных, в которых задача (1), (2), (5), (12), (15) может быть решена аналитически. Стандартным образом [11, 23] с помощью второго уравнения (20) находим зависимость спектральных данных от времени:

$$b(\lambda, t) = b_0(\lambda) \exp \left(\frac{2it}{\lambda^2 - 1} \right), \\ a(\lambda, t) = a_0(\lambda), \\ c(\lambda_j, t) = c_0(\lambda_j) \exp \left(\frac{2it}{\lambda_j^2 - 1} \right). \quad (39)$$

Постоянные интегрирования $b_0(\lambda)$, $a_0(\lambda)$, $c_0(\lambda_j)$ определяются из первого уравнения (20) по заданному начальному условию (15).

Последняя из формул (36) показывает, что матрица $g(x, t)$ голдстоуновских полей неупорядоченного ферромагнетика на полуоси $0 < x < \infty$ выражается через функции Ёоста вспомогательной линейной системы. Поэтому по данным рассеяния (39) следует восстановить фундаментальные решения системы (23).

С этой целью перейдем от решений Ёоста к новым матричным функциям $P_+(\lambda)$ и $P_-(\lambda)$:

$$\begin{aligned} P_+(x, \lambda) &= (\chi_-^{(1)}(\lambda), \chi_+^{(2)}(\lambda)) \varphi_0^{-1}(\lambda), \\ P_-(x, \lambda) &= (\chi_+^{(1)}(\lambda), \chi_-^{(2)}(\lambda)) \varphi_0^{-1}(\lambda), \end{aligned} \quad (40)$$

которые являются аналитическими функциями параметра λ в областях $\text{Im}\lambda > 0$ и $\text{Im}\lambda < 0$ соответственно. Множитель

$$\varphi_0^{-1}(\lambda) = \exp\left[-\frac{i\sigma_3 \lambda x}{\lambda^2 - 1}\right]$$

введен для устранения существенных особенностей в точках $\lambda = \pm 1$.

Вычисление матриц $P_+(\lambda)$ и $P_-(\lambda)$ сводится к решению следующей классической задачи Римана теории функций комплексной переменной. Нужно построить матричные функции $P_+(\lambda)$ и $P_-(\lambda)$, аналитические в областях $\text{Im}\lambda > 0$ и $\text{Im}\lambda < 0$ спектрального параметра λ , которые на вещественной оси R связаны условием сопряжения

$$\begin{aligned} P_-(x, \lambda) &= \frac{P_+(x, \lambda) \varphi_0(x, \lambda)}{a(\lambda)} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b}(\lambda) \\ -b(\lambda) & 1 \end{pmatrix} \varphi_0^{-1}(x, \lambda), \end{aligned} \quad (41)$$

удовлетворяют ограничениям

$$P_{\pm}(x, \lambda) = \sigma_2 P_{\pm}^*(-x, -\lambda^*) \sigma_2, \quad (42)$$

$$P_+(x, \lambda) = \sigma_2 P_-^*(x, \lambda) \sigma_2, \quad \lambda \in R \quad (43)$$

и нормировочному условию

$$P_{\pm}(x, \lambda = \infty) = I. \quad (44)$$

Задача Римана (41)–(44) представляет переформулировку аналитических и трансформационных свойств функций Ёоста и их связи (25) на контуре R .

Как и в работах [16–19], можно переписать условие сопряжения (41) в терминах одной лишь функции $P_-(x, \lambda)$:

$$\begin{aligned} P_-^\dagger(x, \lambda) P_-(x, \lambda) &= \varphi_0(x, \lambda) \times \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b}(\lambda) \\ -b(\lambda) & 1 \end{pmatrix} \varphi_0^{-1}(x, \lambda), \quad \lambda \in R. \end{aligned} \quad (45)$$

Левая часть равенства не содержит особенностей в точках $\lambda = \pm 1$. Правая часть (45) также не будет их содержать при ограничении на выбор спектральной функции $b(\lambda)$: $b(\lambda = \pm 1) = 0$.

После того как решение задачи Римана получено, формула

$$g(x, t) = P_-(x, t, \lambda = 0) g_0, \quad 0 \leq x < \infty \quad (46)$$

воспроизводит решение исходной существенно нелинейной начально-краевой задачи для неупорядоченного ферромагнетика на полуоси $0 < x < \infty$. Здесь $g_0 = \exp(i\sigma_3 t)$.

В общем случае спектральная функция $b(\lambda)$ описывает слабонелинейную динамику диспергирующих спин-волновых цугов. Данные дискретного спектра $\{\lambda_j\}$ параметризуют частицеподобные волны. В следующих разделах мы получим и проанализируем характерные коллективные возбуждения полуограниченного образца.

3. ДИСПЕРГИРУЮЩИЕ ВОЛНЫ

При сравнительно слабых внешних воздействиях в образце возбуждаются только диспергирующие спин-волновые цуги без солитонов. Тогда дискретный спектр вспомогательной системы (23) отсутствует. Независимые элементы матрицы перехода имеют вид

$$\begin{aligned} b(\lambda, t) &= b_0(\lambda) \exp\left(\frac{2it}{\lambda^2 - 1}\right), \quad \lambda \in R, \\ a(\lambda) &= \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{\ln[1 - |b(\mu)|^2]}{(\mu - \lambda)}\right), \quad \text{Im}\lambda > 0. \end{aligned}$$

Введем кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(\lambda) = \begin{cases} P_+(\lambda)/a(\lambda), & \text{Im}\lambda > 0, \\ P_-(\lambda), & \text{Im}\lambda < 0 \end{cases}$$

с нормировкой $\Phi(\lambda = \infty) = I$. С помощью интегральной формулы Коши [24] ее значения в областях $\text{Im}\lambda > 0$ и $\text{Im}\lambda < 0$ можно выразить через скачок

$$\frac{P_+(\lambda)}{a(\lambda)} - P_-(\lambda) = \frac{P_+(\lambda)}{a(\lambda)} \varphi_0(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & \bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \varphi_0^{-1}(\lambda)$$

на вещественной оси R :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= I + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu P_+(\mu)}{(\mu - \lambda) a(\mu)} \varphi_0(\mu) \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 & b^*(\mu) \\ b(\mu) & 0 \end{pmatrix} \varphi_0^{-1}(\mu). \end{aligned} \quad (47)$$

В пределе $\lambda \rightarrow \tilde{\mu} + i0$, $\tilde{\mu} \in R$ формула (47) дает сингулярное интегральное уравнение для расчета значений $P_+(\tilde{\mu})$ при $\tilde{\mu} \in R$. После того как таковые найдены, из представления (47) определяем значения матричных функций $P_{\pm}(\lambda)$ во всех точках комплексной λ -плоскости.

В случае малоамплитудных волн (при $|b_0(\mu)| \ll 1$) в правой части (47) следует положить $a(\mu) \approx 1$, $P_+(\mu) \approx I$. Тогда из (46), (47) в линейном по $b_0(\mu)$ приближении реконструируем матрицу $g(x, t)$ полуограниченного неупорядоченного ферритмагнетика:

$$g(x, t) = \left[I + \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{d\mu}{\mu} \cos\left(\frac{2\mu x}{\mu^2 - 1}\right) B(\mu) \right] \exp(i\sigma_3 t),$$

$$B(\mu) \equiv \begin{pmatrix} 0 & b_0^*(\mu) \exp\left[-\frac{2it}{\mu^2 - 1}\right] \\ b_0(\mu) \exp\left[\frac{2it}{\mu^2 - 1}\right] & 0 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Здесь мы учли свойства симметрии функций $b(\lambda)$ и $\bar{b}(\lambda)$ (28).

Используя формулы (3), (48), вычисляем формы Картана:

$$\omega_{1,t} + i\omega_{2,t} = \frac{4}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\mu d\mu}{\mu^2 - 1} \times \cos\left(\frac{2\mu x}{\mu^2 - 1}\right) b_0(\mu) \exp\left[\frac{2it}{\mu^2 - 1}\right],$$

$$\omega_{1,x} + i\omega_{2,x} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\mu}{\mu^2 - 1} \times \sin\left(\frac{2\mu x}{\mu^2 - 1}\right) b_0(\mu) \exp\left[\frac{2it}{\mu^2 - 1}\right], \quad (49)$$

$$\omega_{3,t} = 2, \quad \omega_{3,x} = 0.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что формулы (48), (49) являются решениями линеаризованных уравнений главного кирального поля (1), (2) при верных краевых условиях (5), (6).

Динамику намагниченности в образце находим с помощью (7):

$$M_1 + iM_2 = \frac{4i}{\pi} \hbar \gamma \exp(2it) \int_0^{\infty} \frac{d\mu b_0(\mu)}{\mu(\mu^2 - 1)} \times \cos\left(\frac{2\mu x}{\mu^2 - 1}\right) \exp\left[\frac{2it}{\mu^2 - 1}\right], \quad (50)$$

$$M_3 = -2\hbar \gamma.$$

Выражения (50) описывают круговую прецессию вокруг оси z и стоячую волну, образованную интерференцией двух встречных спиновых волн: падающей на границу $x = 0$ образца и отраженной от нее. Частота $\Omega_g = 2/(\mu^2 - 1)$ и волновое число $p = \pm 2\mu/(\mu^2 - 1)$ спиновых волн при $|\mu| > 1$ связаны законом дисперсии: $|\Omega_g| = \sqrt{1 + p^2} - 1$, а при $|\mu| < 1$ частота $|\Omega_a| = 2/(1 - \mu^2)$ и волновое число $p = \pm 2\mu/(1 - \mu^2)$ удовлетворяют соотношению $|\Omega_a| = \sqrt{1 + p^2} + 1$.

Напомним, что феноменологическая теория [5–10] описывает только взаимодействие спиновых мод с наименьшими по модулю частотами, а значит, и энергией. Чтобы не выйти за пределы применимости теории, наложим на спектральную функцию $b_0(\mu)$ ограничение: $b_0(\mu) \equiv 0$ при $|\mu| < 1$.

Нетрудно видеть, что в малоамплитудном пределе обратное спектральное преобразование сводится к формулам метода Фурье, который обычно используется при анализе линейных и слабонелинейных волновых процессов.

4. СОЛИТОНЫ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ОБРАЗЦА

При сильных внешних воздействиях в неупорядоченном ферритмагнетике возбуждаются диспергирующие спиновые волны и солитоны. Волны расплываются из-за дисперсии, поэтому наблюдаемые свойства образца во многом определяются долгоживущими солитонами. В этом разделе мы построим и проанализируем решения модели (1), (2), (5), (12) для чисто солитонных состояний, когда диспергирующие волны отсутствуют, а значит, спектральные плотности $b(\lambda) = \bar{b}(\lambda) \equiv 0$.

Эволюция намагниченности в образце определяется данными дискретного спектра системы (23):

$$\{\lambda_j\} = \{\lambda_k, -\lambda_k^*\}, \quad \text{Im}\lambda_j > 0;$$

$$\{c(\lambda_j, t)\} = \{c(\lambda_k, t), c(-\lambda_k^*, t)\} = \left\{ c_0(\lambda_k) \exp\left[\frac{2it}{\lambda_k^2 - 1}\right], -\frac{1}{c_0^*(\lambda_k)} \exp\left[\frac{2it}{\lambda_k^{*2} - 1}\right] \right\},$$

$$k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, 2N, \quad (51)$$

где $c_0(\lambda_k)$ — комплексные постоянные интегрирования.

Солитонная матрица $P_-(\lambda)$ является мероморфной функцией в комплексной λ -плоскости. Для со-

литонных состояний условие (45) можно аналитически продолжить с контура R и переписать в виде

$$P_-(\lambda)P_-^\dagger(\lambda^*) = P_-^\dagger(\lambda^*)P_-(\lambda) = I. \quad (52)$$

Отсюда с учетом соотношения $\det P_-^\dagger(\lambda^*) = a(\lambda)$ заключаем, что полюсы функции $P_-(\lambda)$ в области $\text{Im}\lambda > 0$ совпадают с нулями $\{\lambda_j\} = \{\lambda_k, -\lambda_k^*\}$ коэффициента $a(\lambda)$. В нижней полуплоскости (при $\text{Im}\lambda < 0$) функция $P_-(\lambda)$ является целой с нулями в точках $\{\lambda_j^*\}$:

$$\det P_-(\lambda) = \bar{a}(\lambda) = \prod_{k=1}^N \frac{(\lambda - \lambda_k^*)(\lambda + \lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k)(\lambda + \lambda_k^*)}.$$

Будем искать солитонную матричную функцию $P_-(\lambda)$ в виде разложения на «простые дроби»:

$$P_-(\lambda) = I + \sum_{j=1}^{2N} \frac{A_j}{\lambda - \lambda_j}. \quad (53)$$

Требование отсутствия полюсов в левой части равенства (52) приводит к $2N$ независимым уравнениям:

$$P_-(\lambda_j^*)A_j^\dagger = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2N. \quad (54)$$

Их нетривиальное решение возможно, только когда обе матрицы, $P_-(\lambda_j^*)$ и A_j , вырождены. Представим A_j в виде [23]

$$(A_j)_{\alpha\beta} = (X_j)_\alpha(\xi_j^*)_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Тогда уравнения (54) примут вид

$$P_-(\lambda_j^*)\xi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2N. \quad (55)$$

Как и в работах [16–19], формула (30) и редукция (26) конкретизируют структуру второй вырожденной матрицы:

$$P_-(\lambda_j^*) = i\sigma_2(\chi_+^{*(2)}(\lambda_j^*), -c^*(\lambda_j)\chi_+^{*(2)}(\lambda_j^*))\varphi_0^{-1}(\lambda_j^*),$$

где

$$\varphi_0^{-1}(\lambda_j^*) = \exp[-i\sigma_3\lambda_j^*x/(\lambda_j^{*2} - 1)].$$

Отсюда сразу находим векторы ξ_j с точностью до несущественного общего множителя:

$$\xi_j = \begin{pmatrix} \nu_j^*(x, t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$\nu_j^*(x, t) = c_0^*(\lambda_j) \exp\left[\frac{2i\lambda_j^*x}{\lambda_j^{*2} - 1} - \frac{2it}{\lambda_j^{*2} - 1}\right],$$

где $c_0(\lambda_j)$ — постоянные интегрирования в формулах (39). Здесь мы восстановили зависимость от времени. Напомним, что постоянные параметры дискретного спектра образуют пары:

$$\begin{aligned} \{\lambda_j\} &= \{\lambda_k, -\lambda_k^*\}, \\ \{c_0(\lambda_j)\} &= \{c_0(\lambda_k), -1/c_0^*(\lambda_k)\}, \\ k &= 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, 2N. \end{aligned} \quad (57)$$

После подстановки ξ_j (56) в (55) получим линейную систему для расчета векторов X_j . Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} [P_-(\lambda)]_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} - \sum_{s,p=1}^{2N} \frac{(M^{-1})_{sp}(\xi_p)_\alpha(\xi_s^*)_\beta}{\lambda - \lambda_s}, \\ (M^{-1})_{sp} &= \frac{\partial \ln \det M}{\partial M_{ps}}. \end{aligned} \quad (58)$$

Формулы (46), (58) дают мультисолитонное решение существенно нелинейной краевой задачи для неупорядоченного ферромагнетика на полуоси. Они описывают упругие парные столкновения N солитонов друг с другом и их отражения от границы образца.

Элементарный солитон параметризуют два нуля, λ_1 и $-\lambda_1^*$, функции $a(\lambda)$: $\lambda_1 = \lambda' + i\lambda''$, $-\infty < \lambda' < \infty$, $\lambda'' > 0$. Векторы $\xi_{1,2}$ в подробной записи имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_{1,2} &= \begin{pmatrix} \nu_{1,2}^* \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \nu_1 &= c_0 \exp[-d^{-1}(x - Vt) + i\omega t - ikx], \\ \nu_2 &= -(1/c_0^*) \exp[-d^{-1}(x + Vt) + i\omega t + ikx], \end{aligned} \quad (59)$$

где c_0 — произвольная комплексная постоянная,

$$\begin{aligned} d^{-1} &= \frac{2\lambda''(|\lambda_1|^2 + 1)}{|\lambda_1^2 - 1|^2} > 0, \quad V = \frac{2\lambda'}{|\lambda_1|^2 + 1}, \\ \omega &= \frac{2(\lambda'^2 - \lambda''^2 - 1)}{|\lambda_1^2 - 1|^2}, \quad k = \frac{2\lambda'(|\lambda_1|^2 - 1)}{|\lambda_1^2 - 1|^2}. \end{aligned}$$

Матрица $g(x, t)$ односолитонного возбуждения,

$$g = \left(I + \frac{A}{\tau}\right)g_0, \quad (60)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1 + |\nu_2|^2)}{\lambda_1(\lambda_1^* - \lambda_1)} \begin{pmatrix} |\nu_1|^2 & \nu_1^* \\ \nu_1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{(1 + \nu_1^*\nu_2)}{2|\lambda_1|^2} \begin{pmatrix} \nu_2^*\nu_1 & \nu_2^* \\ \nu_1 & 1 \end{pmatrix} - \\ &- \frac{(1 + \nu_1\nu_2^*)}{2|\lambda_1|^2} \begin{pmatrix} \nu_1^*\nu_2 & \nu_1^* \\ \nu_2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{(1 + |\nu_1|^2)}{\lambda_1^*(\lambda_1^* - \lambda_1)} \begin{pmatrix} |\nu_2|^2 & \nu_2^* \\ \nu_2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \tau &= \frac{(1 + |\nu_1|^2)(1 + |\nu_2|^2)}{(\lambda_1 - \lambda_1^*)^2} + \frac{|1 + \nu_1^*\nu_2|^2}{4|\lambda_1|^2}, \end{aligned}$$

как и положено, удовлетворяет краевым условиям (6), (13). Здесь $g_0(t) = \exp[i\sigma_3 t]$. Выражение (60) описывает локализованное магнитное образование протяженностью порядка d , которое движется к границе образца либо от нее со скоростью $|V| < 1$. Пусть для определенности $V > 0$. Тогда на больших расстояниях от края образца (при $x \gg 1$) в пределе $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$) в сопутствующей солитону системе отсчета, где $x - Vt = \text{const}$ ($x + Vt = \text{const}$), можно положить $\nu_2 = 0$ ($\nu_1 = 0$). В результате формула (60) упрощается и принимает вид [23, 25]:

$$\begin{aligned}
 g_+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1/\lambda_1^* \end{pmatrix} \left(I + \frac{\lambda_1^* - \lambda_1}{\lambda_1} P_+ \right) \exp[i\sigma_3 t], \\
 g_- &= \begin{pmatrix} \lambda_1/\lambda_1^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(I + \frac{\lambda_1^* - \lambda_1}{\lambda_1} P_- \right) \exp[i\sigma_3 t], \\
 P_+ &= \frac{1}{2 \operatorname{ch} y_+} \begin{pmatrix} \exp(-y_+) & \exp(-i s_+) \\ \exp(i s_+) & \exp(y_+) \end{pmatrix}, \\
 P_- &= \frac{1}{2 \operatorname{ch} y_-} \begin{pmatrix} \exp(y_-) & \exp(-i s_-) \\ \exp(i s_-) & \exp(-y_-) \end{pmatrix}, \\
 y_{\pm} &= d^{-1}(x \mp Vt - x_{\pm}), \quad s_{\pm} = \omega t \mp kx + \alpha_{\pm}, \\
 x_+ &= d \ln |2\lambda_1 c_0 / (\lambda_1 + \lambda_1^*)|, \\
 x_- &= d \ln |2\lambda_1 / [c_0(\lambda_1 + \lambda_1^*)]|, \\
 \alpha_+ &= \arg(c_0/\lambda_1), \quad \alpha_- = \arg(c_0 \lambda_1).
 \end{aligned} \tag{61}$$

Предельным солитонам (61) отвечает поле намагниченности (7)

$$\begin{aligned}
 -\frac{M_3^{\pm}}{2\hbar\gamma} &= 1 - \frac{2\lambda''(1 + |\lambda_1|^2)}{|\lambda_1|^2 |\lambda_1^2 - 1|^2 \operatorname{ch}^2 y_{\pm}}, \\
 -\frac{(M_1 + iM_2)^+}{2\hbar\gamma} &= \frac{\lambda'' \exp[i(s_+ + 2t)]}{|\lambda_1|^2 \operatorname{ch}^2 y_+} \times \\
 &\times \left[\frac{\lambda_1 \exp(y_+)}{\lambda_1^2 - 1} + \frac{\lambda_1^* \exp(-y_+)}{\lambda_1^{*2} - 1} \right], \\
 -\frac{(M_1 + iM_2)^-}{2\hbar\gamma} &= \frac{\lambda'' \exp[i(s_- + 2t)]}{|\lambda_1|^2 \operatorname{ch}^2 y_-} \times \\
 &\times \left[\frac{\lambda_1^* \exp(y_-)}{\lambda_1^{*2} - 1} + \frac{\lambda_1 \exp(-y_-)}{\lambda_1^2 - 1} \right]
 \end{aligned} \tag{62}$$

— такое же, как у солитонов неограниченного неупорядоченного ферримагнетика [11]. Намагниченность в ядре солитона совершает круговую прецессию с частотой $2 + \omega$ вокруг оси z . Волна прецессии с волновым числом k зарождается у одного края солитона и исчезает у другого. Параметры x_{\pm} — координаты центра солитона в сопутствующей ему системе отсчета, где $x \mp Vt = 0$, α_{\pm} — начальные фазы прецессии.

Анализ формул (62) приводит к заключению, что единственным результатом взаимодействия солитона (60) с краем образца $x = 0$ будут сдвиг его положения

$$\Delta x = x_+ - x_- = 2d \ln |c_0|$$

и изменение начальной фазы прецессии в центре солитона, где $y_{\pm} = 0$,

$$\Delta s = -k(x_+ + x_-) - 4 \arg \lambda_1.$$

Взаимодействие солитона (60) с поверхностью образца сопровождается всплеском приграничной намагниченности продолжительностью $\Delta x/V$. При этом строение солитона радикально меняется. В момент $t_0 = -d \ln |c_0|/V$ столкновения солитона с краем образца зависимость от x компоненты M_3 намагниченности определяется формулой

$$-\frac{M_3^{\pm}}{2\hbar\gamma} \Big|_{t=t_0} = 1 - \frac{8\lambda'^2 R}{\tau_1^2 |\lambda_1^2 - 1|^2 \lambda''^2}, \tag{63}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= |\nu_1 - \nu_2|^2 + (1 + |\nu_0|^2) (\lambda'/\lambda'')^2, \\
 R &= 2|\nu_0|^2(1 + |\nu_0|^2)^2(1 + |\lambda_1|^2) - 8\lambda''^2 |\nu_0|^4 + \\
 &+ 2\operatorname{Re}[2\nu_1^* \nu_2 |\nu_0|^2 (|\lambda_1|^2 - 1) + \nu_1^* \nu_2 (1 + \nu_1^2 \nu_2^{*2}) (\lambda_1^2 - 1)], \\
 |\nu_0|^2 &= \exp(-2d^{-1}x), \\
 \nu_{1,2} &= \pm \exp[-d^{-1}x + i(\omega t_0 \mp kx + \arg c_0)].
 \end{aligned}$$

На границе образца (при $x = 0$) имеем $|\nu_0|^2 = 1$, $\nu_1 \nu_2^* = -1$, поэтому выражение (63) упрощается:

$$-\frac{M_3^{\pm}}{2\hbar\gamma} \Big|_{x=0, t=t_0} = 1 - \frac{8(\lambda'\lambda'')^2}{|\lambda_1|^4 |\lambda_1^2 - 1|^2}.$$

Для сравнения, в глубине образца в центре солитона (при $y_{\pm} = 0$) компонента M_3 принимает значение

$$-\frac{M_3^{\pm}}{2\hbar\gamma} \Big|_{x \gg 1} = 1 - \frac{2\lambda''(1 + |\lambda_1|^2)}{|\lambda_1|^2 |\lambda_1^2 - 1|^2}.$$

На рисунке показаны перемагничивание среды около поверхности образца и компонента намагниченности M_3 солитона в глубине образца при $\lambda_1 = \exp(i\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \pi/2$. В этом случае волновое число $k = 0$, скорость солитона $V = \cos \varepsilon > 0$, а его размер порядка $d = \sin \varepsilon$.

Заметим, что континуальное приближение справедливо, когда в исходных размерных переменных

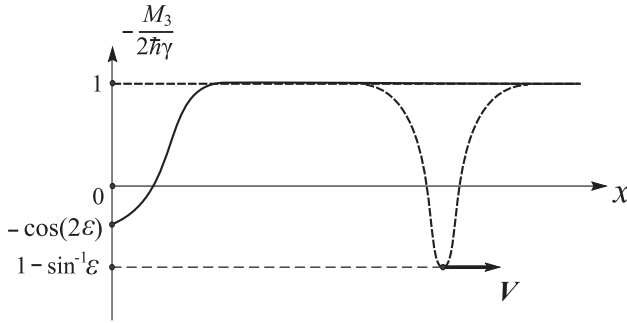


Рисунок. Перемагничивание среды в момент столкновения $t = t_0$ солитона с поверхностью образца (сплошная линия) и при удалении солитона от поверхности (штриховая линия); $\lambda_1 = \exp(i\epsilon)$, $0 < \epsilon < \pi/2$

протяженность солитона больше постоянной кристаллической решетки. Отсюда получаем ограничение на выбор параметра λ_1 :

$$l_0 d \gg a_0,$$

где l_0 — обменная длина, a_0 — характерное расстояние между магнитными атомами.

В общем случае нормировка (10) векторных полей \mathbf{u} и \mathbf{v} (8) отличается от использованной нами: $\mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^2 = 1$. Однако уравнения (1), (2) и краевое условие (5), (6) остаются справедливыми после формальной замены

$$g(x, t) \rightarrow g(\bar{x}, \bar{t}), \tag{64}$$

где $\bar{x} = [A(\xi) - A(\eta)]/2$, $\bar{t} = [A(\xi) + A(\eta)]/2$; $A(\xi)$ — произвольная вещественная функция, $\partial_\xi A(\xi) \neq 0$; $\xi = (t + x)/2$, $\eta = (t - x)/2$ — конусные переменные.

Киральное поле $g(\bar{x}, \bar{t}) \in \text{SU}(2)$ нового солитонного решения определяется прежней функцией (60) с изменением выражений для $\nu_{1,2}$ и g_0 :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= c_0 \exp(-D_1 - i s_1), \\ \nu_2 &= -(1/c_0^*) \exp(-D_2 - i s_2), \\ D_{1,2} &= \frac{A(\xi)\lambda''}{|1 \pm \lambda_1|^2} - \frac{A(\eta)\lambda''}{|1 \mp \lambda_1|^2}, \\ s_{1,2} &= \frac{A(\xi)(1 \pm \lambda')}{|1 \pm \lambda_1|^2} + \frac{A(\eta)(1 \mp \lambda_1)}{|1 \mp \lambda_1|^2}, \\ g_0 &= \exp[i \sigma_3 (A(\xi) + A(\eta))/2]. \end{aligned} \tag{65}$$

Ввиду произвольности функции $A(\xi)$, решение (60), (65) описывает многообразие процессов сосуществования и делокализации частицеподобного солитона в поле двух волн намагниченности не малой амплитуды, движущихся в противоположных направлениях.

С целью пояснить утверждение положим

$$A(\xi) = 2\xi a + b \sin(2\kappa \xi), \quad A(\eta) = 2\eta a + b \sin(2\kappa \eta),$$

где $a, b, \kappa > 0$ — вещественные параметры. Тогда функции $\nu_{1,2}$ примут вид

$$\begin{aligned} \nu_1 &= c_0 \exp(-a[d^{-1}(x-Vt) + i\omega t - ikx] - \tilde{D}_1 - i\tilde{s}_1), \\ \nu_2 &= -(1/c_0^*) \exp(-a[d^{-1}(x+Vt) + ikx] - \tilde{D}_2 - i\tilde{s}_2). \end{aligned}$$

Определения d, V, ω, k остаются такими же, как в формуле (59), а

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{1,2} &= \lambda'' b \left(\frac{\sin(2\kappa \xi)}{|1 \pm \lambda_1|^2} - \frac{\sin(2\kappa \eta)}{|1 \mp \lambda_1|^2} \right), \\ \tilde{s}_{1,2} &= b \left(\frac{(1 \pm \lambda') \sin(2\kappa \xi)}{|1 \pm \lambda_1|^2} + \frac{(1 \mp \lambda') \sin(2\kappa \eta)}{|1 \mp \lambda_1|^2} \right). \end{aligned}$$

Коэффициент a задает «растяжение–сжатие» параметров d^{-1}, k, ω прежнего солитона. Это — проявление масштабной инвариантности обменных взаимодействий. Ограниченные функции $\tilde{D}_{1,2}, \tilde{s}_{1,2}$ ведут к амплитудной и фазовой модуляциям солитона.

Вне области локализации солитона при $x \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} g(\bar{x}, \bar{t}) &\rightarrow \tilde{g}_0(x, t) = \\ &= \exp \left[i \sigma_3 \left(a t + \frac{b}{2} [\sin(2\kappa \xi) + \sin(2\kappa \eta)] \right) \right]. \end{aligned} \tag{66}$$

Полю $\tilde{g}_0(x, t)$ отвечает распределение намагниченности:

$$\begin{aligned} -\frac{\mathbf{M}}{2h\gamma} &= \\ &= \left(0, 0, a + \frac{\kappa b}{2} [\cos(\kappa(t+x)) + \cos(\kappa(t-x))] \right) = \\ &= (0, 0, a + \kappa b \cos(\kappa t) \cos(\kappa x)), \end{aligned}$$

которое описывает стоячую волну на фоне однородного состояния среды. Стоячая волна образуется при наложении движущихся к краю образца монокроматической волны $\propto \cos[\kappa(t+x)]$ и отраженной от нее волны $\propto \cos[\kappa(t-x)]$. Волновое поле большой амплитуды делокализует и «разрушает» частицеподобные солитоны. Приведенный пример поясняет интерпретацию полученного решения.

Мультисолитонные решения (46), (64) описывают упругие парные столкновения N солитонов друг с другом, их отражения от края образца, а также деградацию солитонов в поле волн большой амплитуды.

5. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Не зависящий от времени элемент $a(\lambda)$ матрицы перехода служит производящей функцией интегралов движения неупорядоченного ферримагнетика с краевыми условиями (5), (12). Физически содержательные локальные интегралы движения совпадают с коэффициентами разложения функции $\ln a(u)$ в ряд по степеням $\lambda - 1$, который нетрудно получить с помощью формул (32)–(35) из разд. 2.

Первый член степенного ряда

$$\ln a(\lambda) = \frac{iE}{2} + O(\lambda - 1)$$

воспроизводит энергию (11) полуограниченного образца.

С другой стороны, разложение функции $\ln a(\lambda)$ по степеням $\lambda - 1$ можно найти из дисперсионного соотношения (38). Сравнение двух разложений позволяет выразить все интегралы движения через спектральные данные вспомогательной линейной системы (20). В частности, энергия полубесконечного неупорядоченного ферримагнетика допускает следующее спектральное представление:

$$E = 4 \sum_{k=1}^N \arctg \frac{2\lambda_k''}{|\lambda_k|^2 + 1} + \int_1^{\infty} d\mu \Omega(\mu) N(\mu), \quad (67)$$

где

$$\Omega(\mu) = 2(\mu^2 - 1)^{-1},$$

$$N(\mu) = -\pi^{-1} \ln(1 - |b(\mu)|^2) > 0.$$

Согласно результатам разд. 2, величины $\Omega(\mu)$ и $p(\mu) = 2\mu(\mu^2 - 1)^{-1}$ представляют частоту и квазимпульс линейных мод неупорядоченного ферримагнетика. Отсюда следует, что функция $N(\mu)$ имеет смысл плотности магнонов.

Сумма в правой части соотношения (67) дает независимые вклады в энергию образца отдельных солитонов.

Мы показали, что любое нелинейной возбуждение полуограниченного неупорядоченного ферримагнетика можно описать в терминах идеального газа существенно нелинейных частицеподобных мод — солитонов — и квазичастиц непрерывного спектра диспергирующих волн — магнонов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод феноменологических лагранжианов [5–10] открывает новые возможности для анализа нелинейной динамики магнетиков со сложной обменной

структурой. В данной работе посредством объединения обратного спектрального преобразования с методом «изображений» исследованы солитоны и диспергирующие волны полуограниченного неупорядоченного ферримагнетика со свободными краевыми спинами и однородным распределением намагниченности в глубине образца. В рамках макроскопической теории [5–10] описание нелинейных возбуждений сводится к решению начально-краевой задачи для уравнений главного кирального поля группы SU(2) на полуоси [11]. Получены аналитические выражения для солитонов, ядра которых в ходе взаимодействия с поверхностью образца претерпевают значительные изменения. Солитонные процессы перемагничивания приграничных слоев материала невозможно описать традиционными методами нелинейной теории возмущений. Таковая предполагает малость изменений строения и свойств солитонов при внешних воздействиях. Вычислены сдвиги положений и начальных фаз внутренней прецессии солитонов после их отражения от границы образца.

Теоретическое описание нелинейной динамики диспергирующих волновых пучков сведено к решению линейных интегральных уравнений. Показано, что любое начальное возмущение полубесконечного неупорядоченного ферримагнетика можно трактовать в терминах идеального газа солитонов и магнонов.

Предложенная техника допускает обобщение и позволяет исследовать свойства солитонов в поле бегущей к границе образца и отраженной от нее волн. При наложении встречных волн в образце формируется нелинейная стоячая волна. Падающая и отраженная волны конкретизируются выбором произвольной функции стационарного профиля. Стоячая волна вызывает амплитудную и фазовую модуляции солитона. При большой амплитуде она разрушает солитон.

Полученные результаты можно использовать для планирования экспериментов по наблюдению упругого отражения солитонов от края образца, солитонных процессов перемагничивания приграничных слоев материала, а также изучения явления делокализации солитонов в поле волн большой амплитуды.

Актуально применение предложенной техники к анализу других моделей теории [5–10] для полуограниченных магнетиков со сложной обменной структурой.

Результаты работы следует учитывать при выборе стратегии моделирования солитонных режимов в

приграничных слоях реальных образцов. Они полезны для верификации численных расчетов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования России (тема «Квант», № 122021000038-7).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics. Vol. 9. Statistical Physics. Part 2*, Pergamon Press, Oxford (1980) [Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, том IX. Статистическая физика. Ч. 2*, Наука, Москва (1978)].
2. E. A. Turov, *Physical Properties of Magnetically Ordered Crystals*, Academ. Press, New York, London (1965) [Е. А. Туров, *Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов*, Изд-во АН СССР, Москва (1963)].
3. A. I. Akhiezer, V. G. Baryachtar, and S. V. Peletminskii, *Spin Waves*, North-Holland, Amsterdam (1968) [А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967)].
4. E. A. Turov, A. V. Kolchanov, V. V. Men'shenin, I. F. Mirsaev, and V. V. Nikolaev, *Symmetry and Physical Properties of Antiferromagnets*, Fizmatlit, Moscow (2001), in Russian [Е. А. Туров, А. В. Колчанов, В. В. Меньшенин, И. Ф. Мирсаев, В. В. Николаев, *Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков*, Физматлит, Москва (2001)].
5. D. V. Volkov, A. A. Zheltukhin, and Yu. P. Bliokh, in *Supersymmetry and Quantum Field Theory*, ed. by J. Wess and A. P. Akulov, Springer, Berlin, Heidelberg (1998), p. 370 [Д. В. Волков, А. А. Желтухин, Ю. П. Блюх, *ФТТ* **13**, 1668 (1971)].
6. D. V. Volkov and A. A. Zheltukhin, *Fizika nizkikh temperatur*, **5**, 1359 (1979), in Russian [Д. В. Волков, А. А. Желтухин, *ФНТ* **5**, 1359 (1979)].
7. D. V. Volkov and A. A. Zheltukhin, *Sov. Phys. JETP* **51**, 937 (1980) [Д. В. Волков, А. А. Желтухин, *ЖЭТФ* **78**, 1867 (1980)].
8. A. F. Andreev and V. I. Marchenko, *Sov. Phys. JETP* **43**, 794 (1976) [А. Ф. Андреев, В. И. Марченко, *ЖЭТФ* **70**, 1522 (1976)].
9. A. F. Andreev, *Sov. Phys. JETP* **47**, 411 (1978) [А. Ф. Андреев, *ЖЭТФ* **74**, 786 (1978)].
10. A. F. Andreev and V. I. Marchenko, *Sov. Phys. Usp.* **23**, 21 (1980) [А. Ф. Андреев, В. И. Марченко, *УФН* **130**, 37 (1980)].
11. A. B. Borisov and V. V. Kiselev, *Quasi-one-dimensional Magnetic Solitons*, Fizmatlit, Moscow (2014), in Russian [А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Квазиодномерные магнитные солитоны*, Физматлит, Москва (2014)].
12. E. K. Sklyanin, *Funct. Anal. Appl.* **21**, 164 (1987) [Е. К. Склянин, *Функц. анализ и его прил.* **21**, 86 (1987)].
13. I. T. Habibullin, in *Nonlinear World: IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, ed. by V. G. Baryachtar et al., World Sci., Singapore (1989), Vol. 1, p. 130.
14. I. T. Khabibullin, *Theor. Math. Phys.* **86**, 28 (1991) [И. Т. Хабибуллин, *ТМФ* **86**, 43 (1991)].
15. A. S. Fokas, *Commun. Math. Phys.* **230**, 1 (2002).
16. V. V. Kiselev, *JETP* **163**, 330 (2023) [В. В. Киселев, *ЖЭТФ* **163**, 375 (2023)].
17. V. V. Kiselev, *Theor. Math. Phys.* **219**, 576 (2024) [В. В. Киселев, *ТМФ* **219**, 55 (2024)].
18. V. V. Kiselev and A. A. Raskovalov, *Chaos, Solitons and Fract.* **188**, 115500 (2024).
19. V. V. Kiselev, *Theor. Math. Phys.* **220**, 1440 (2024) [В. В. Киселев, *ТМФ* **220**, 448 (2024)].
20. V. V. Kiselev and A. A. Raskovalov, *Ann. Phys.* **475**, 169933 (2025).
21. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics. Vol. 1. Mechanics*, Butterworth-Heinemann (1976) [Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, том I. Механика*, Наука, Москва (1973)].
22. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wiley, Cambridge, Mass. (1950) [Г. Голдстейн, *Классическая механика*, Наука, Москва (1975)].
23. S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, and V. E. Zakharov, *Theory of Solitons. The Inverse Scattering Method*, Plenum Press, New York (1984) [В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980)].
24. F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems*, Dover Publ., New York (1990) [Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва (1977)].
25. V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov, *JETP Lett.* **27**, 42 (1977) [В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ* **27**, 47 (1977)].

Nonlinear Dynamics of the Principal Chiral Field Model of the Group SU(2) on the Semiaxis*V. V. Kiselev*

M. N. Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
620219, Ekaterinburg, Russia
Institute of Physics and Technology, Ural Federal University
620002, Ekaterinburg, Russia

Abstract

In the framework of the principal chiral field model on the group SU(2), the nonlinear dynamics of solitons and dispersive waves of the semibounded disordered ferrimagnet is investigated using the inverse scattering problem technique. The boundary conditions are taken into account, that correspond to free spins on the surface of the sample and homogeneous magnetization distribution in its depth. It is shown, that the soliton cores are strongly deformed under their interaction with the boundary of the sample. After the collision, moving into the depth of the sample, the solitons restore the stationary form, typical for precessing solitons of the unbounded medium. The shifts of the positions and initial precession phases of solitons after their reflection from the edge of the sample are calculated. Interaction of soliton with standing magnetization wave in the semibounded sample is described analytically. The wave induces the amplitude and phase modulations of soliton. The large-amplitude wave «deconstructs» the soliton.

Keywords: disordered ferrimagnet, soliton, inverse scattering problem technique, reflection from the boundary, principal chiral field model.