

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОТОННОГО КОЛЬЦА С КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНОЙ

С. В. Чернов ^{a*}

^a Астрокосмический центр,
Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117997, Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 марта 2025 г.,
после переработки 28 марта 2025 г.
Принята к публикации 12 апреля 2025 г.

Представлена аналитическая модель толстого асимметричного гауссового кольца для которой вычисляется функция видности в двух перпендикулярных направлениях для баз вплоть до 6 диаметра Земли.

DOI: 10.31857/S0044451025060057

1. ВВЕДЕНИЕ

Недавно группа Телескопа Горизонта Событий (ТГС) опубликовала первые изображения сверхмассивных черных дыр в центрах двух галактиках: в эллиптической галактике *M87** [1] и в нашей галактике Млечный Путь, *Sgr A** [2]. Наблюдения проводились в миллиметровом диапазоне на частоте 230 ГГц. На полученных изображениях отчетливо видно асимметричное неоднородное яркое кольцо, в центре которого расположено темное пятно. Данное изображение интерпретируется как образ сверхмассивной черной дыры [1, 2]. Диаметр кольца составляет 42 микросекунды (мкс) дуги для *M87** [1] и 51.8 мкс дуги для *Sgr A** [2] соответственно. Однако из-за недостаточного углового разрешения (порядка ~ 25 мкс дуги) и низкого качества изображения группе ТГС не удалось оценить толщину и провести детальный анализ структуры кольца.

Общая теория относительности предсказывает, что черные дыры могут проявлять себя в виде тени, окруженной бесконечным числом вложенных фотонных колец [3]. Каждому фотонному кольцу соответствует определенное количество полуорбит, которые фотон проходит, прежде чем достичь наблюдателя. Фотонное кольцо проявляется как яркая и четкая особенность на изображении черной дыры. Считается, что в наблюдаемых образах черных дыр, полученных группой ТГС, яркое кольцо должно со-

держивать бесконечное число фотонных колец. Самое яркое и широкое фотонное кольцо является первым, и предполагается, что поток и ширина последующих колец уменьшается в $e^{-\pi}$ раз [4, 5]. Измерение и анализ формы фотонного кольца позволит оценить спин черной дыры.

На сегодняшний день рассматриваются концепции космических радиотелескопов, которые способны наблюдать первое фотонное кольцо [6, 7]. В работе [6] обсуждаются космические радиотелескопы, расположенные на круговых регулярных и ретроградных орбитах. Эта концепция позволяет получать высококачественные изображения сверхмассивных черных дыр с достаточно большим угловым разрешением вплоть до $\sim 1-2$ мкс дуги. С помощью данной концепции можно разрешить кольцо, полученное группой ТГС, и наблюдать первое фотонное кольцо сверхмассивной черной дыры. Как известно, бесконечно тонкое кольцо будет проявляться на базах, превышающих диаметр Земли, в виде универсальных быстро осциллирующих функции на графике функции видности [5, 8, 9]. Толстое кольцо, наоборот, будет проявляться на базах, меньших диаметра Земли. Моделирование численных наблюдений и анализ функций видности на базах, превышающих диаметр Земли, поможет лучше понять и изучить природу физики черных дыр.

В данной работе рассматривается аналитическая модель толстого асимметричного кольца с радиальным гауссовым профилем яркости и вычисляется функция видности с базами вплоть до 6 диаметра Земли на частоте 690 ГГц.

* E-mail: chernov@lpi.ru

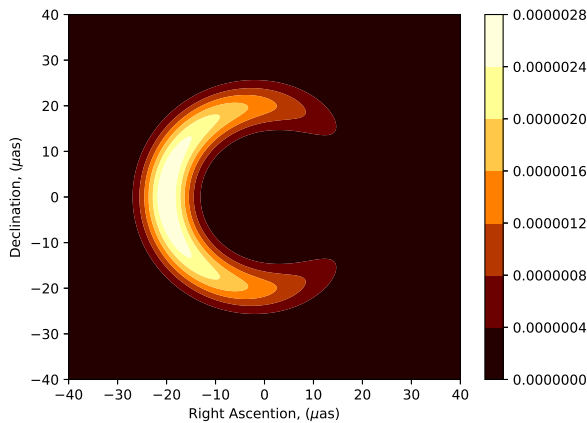


Рис. 1. Распределение яркости в кольце для следующих параметров: $r_0 = 20$ мкс дуги, $\Delta r = 5$ мкс дуги, $\phi_0 = \pi$, $B = 1$ и $n = 1$. Суммарный поток в кольце равен 1 Янский

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Откликом радиоинтерферометра на распределение сигнала на небе является комплексная функция видности. Эта функция связана с распределением яркости источника на небесной сфере $I(r, \phi_r)$ через преобразование Фурье [10]. В полярных координатах u, ϕ_u функция видности определяется следующим образом [10]

$$V(u, \phi_u) = \iint I(r, \phi_r) e^{-2\pi i u r \cos(\phi_r - \phi_u)} r dr d\phi_r, \quad (1)$$

где u — безразмерная проекция базы интерферометра, выраженная в единицах длин волн, а r, ϕ_r — полярные координаты в картинной плоскости источника, выраженные в радианах.

Здесь мы будем предполагать, что функцию распределения яркости источника на небе можно представить в виде произведения радиальной и азимутальной компонент:

$$I(r, \phi_r) = I_r(r) I_\phi(\phi_r). \quad (2)$$

Радиальную часть будем описывать гауссовой функцией распределения следующим образом:

$$I_r(r) = e^{-\left(\frac{r-r_0}{\Delta r}\right)^2}, \quad (3)$$

где r_0 — радиус и Δr — ширина кольца в радианах. Азимутальную часть — асимметричной функцией распределения заданной в виде

$$I_\phi(\phi_r) = \left(1 - B * \sin^2 \frac{\phi_r - \phi_0}{2}\right)^n, \quad (4)$$

где B — параметр асимметрии, ϕ_0 — направление на максимальную яркость в кольце, а n — степень

асимметрии. Если параметр асимметрии равен нулю $B = 0$, то мы получаем симметричную функцию распределения. В этом случае функция видности вычисляется достаточно просто (см. [8]). Следует отметить, что в более реалистичных сценариях параметр асимметрии B может зависеть от спина черной дыры и угла наклона. В данной работе мы рассмотрим случай, когда параметр асимметрии является постоянной величиной, не зависящей от спина и угла наклона. Кроме того, мы будем рассматривать случай, когда степень асимметрии равна единице, $n = 1$.

На рис. 1 показан пример распределения яркости в кольце для радиуса $r_0 = 20$ мкс дуги и ширины кольца $\Delta = 5$ мкс дуги. Максимум яркости расположен под углом $\phi_0 = \pi$. Суммарный поток в кольце равен 1 Янский. Если подставить выражение (4) в уравнение (1), то интеграл по углу ϕ_r может быть взят явно. В результате получаем

$$V(u, \phi_u) = \pi \int [(2 - B) J_0(2\pi u r) - i B J_1(2\pi u r) \cos(\phi_u - \phi_0)] I_r(r) r dr, \quad (5)$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно. Данное выражение (5) является общим, и функция видности является комплексной величиной в силу асимметрии функции распределения яркости на небе. В симметричном случае, когда $B = 0$, функция видности становится действительной величиной. Также стоит заметить, что функция видности зависит от направления проекции базы интерферометра, т.е. от угла ϕ_u . В разных направлениях амплитуда и фаза функции видности может принимать разные значения.

Интеграл (5) с функцией распределения (3) может быть вычислен с хорошей точностью приближенными методами. Нас, в первую очередь, будут интересовать достаточно большие базы, превышающие диаметр Земли. Для таких баз функции Бесселя можно разложить в ряд по большому аргументу ($2\pi u r \gg 1$, см. [11])

$$J_0(x) \approx \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sqrt{\pi x}}, \quad (6)$$

$$J_1(x) \approx \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sqrt{\pi x}}. \quad (7)$$

Стоит заметить, что данное разложение справедливо и для баз, меньших диаметра Земли. Тогда функция видности может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}
 V(u, \phi_u) = & \frac{2-B}{\sqrt{2u}} \int_0^\infty (\sin(2\pi ur) + \cos(2\pi ur)) \sqrt{r} e^{-\left(\frac{r-r_0}{\Delta r}\right)^2} dr - \\
 & -iB \frac{\cos(\phi_u - \phi_0)}{\sqrt{2u}} \int_0^\infty (\sin(2\pi ur) - \cos(2\pi ur)) \sqrt{r} e^{-\left(\frac{r-r_0}{\Delta r}\right)^2} dr.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Этот интеграл (8) может быть вычислен аналитически точно, используя выражение (3.953) из [12]. В результате мы получаем окончательное выражение для функции видности с асимметричным распределением яркости (4) и радиальным гауссовым профилем(3)

$$\begin{aligned}
 V(u, \phi_u) = & \frac{2-B}{\sqrt{8u}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\Delta r^2}{2}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{r_0^2}{2\Delta r^2} - \frac{\pi^2 u^2 \Delta r^2}{2}\right) \times \\
 & \times \left[(1-i) \exp(i\pi ur_0) D_{-3/2}\left(-i\sqrt{2}\pi u \Delta r - \sqrt{2}\frac{r_0}{\Delta r}\right) + (1+i) \exp(-i\pi ur_0) D_{-3/2}\left(i\sqrt{2}\pi u \Delta r - \sqrt{2}\frac{r_0}{\Delta r}\right) \right] - \\
 & -iB \frac{\cos(\phi_u - \phi_0)}{\sqrt{8u}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{\Delta r^2}{2}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{r_0^2}{2\Delta r^2} - \frac{\pi^2 u^2 \Delta r^2}{2}\right) \times \\
 & \times \left[-(1+i) \exp(i\pi ur_0) D_{-3/2}\left(-i\sqrt{2}\pi u \Delta r - \sqrt{2}\frac{r_0}{\Delta r}\right) + (i-1) \exp(-i\pi ur_0) D_{-3/2}\left(i\sqrt{2}\pi u \Delta r - \sqrt{2}\frac{r_0}{\Delta r}\right) \right],
 \end{aligned} \tag{9}$$

где D — функция Вебера (функция параболического цилиндра). Функция видности (9) является комплексной функцией и зависит как от радиуса, так и от ширины кольца, а также от направления базы ϕ_u . Для удобства вычисления функции видности и визуализации можно переписать функции Вебера через полиномы Эрмита. В результате получаем

$$\begin{aligned}
 V(u, \phi_u) = & \frac{2-B}{\sqrt{8u}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (\Delta r)^{3/2} (1-i) \exp\left(-\frac{r_0^2}{\Delta r^2}\right) \times \left[H_{-3/2}\left(-i\pi u \Delta r - \frac{r_0}{\Delta r}\right) + iH_{-3/2}\left(i\pi u \Delta r - \frac{r_0}{\Delta r}\right) \right] - \\
 & -iB \frac{\cos(\phi_u - \phi_0)}{\sqrt{8u}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (\Delta r)^{3/2} (1+i) \exp\left(-\frac{r_0^2}{\Delta r^2}\right) \times \left[iH_{-3/2}\left(i\pi u \Delta r - \frac{r_0}{\Delta r}\right) - H_{-3/2}\left(-i\pi u \Delta r - \frac{r_0}{\Delta r}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{10}$$

где H — полиномы Эрмита. Нормировка функции видности определяется выражением функции видности при малых базах, которое принимает вид

$$V(u \rightarrow 0, \phi_u) \approx \frac{2-B+iB \cos(\phi_u - \phi_0)}{\sqrt{2u}} \times \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (\Delta r)^{3/2} \exp\left(-\frac{r_0^2}{\Delta r^2}\right) H_{-3/2}\left(-\frac{r_0}{\Delta r}\right). \tag{11}$$

Стоит заметить, что при малых проекциях баз, когда $u \rightarrow 0$, приближение (7) перестает выполняться. Это приводит к незначительному расхождению по амплитуде, которая легко компенсируется подгоночным множителем.

На рис. 2 представлена функция видности в двух перпендикулярных направлениях: $\phi_u = 0, \pi/2$. За-

висимость показана от проекции базы, выраженной в длинах волн (нижняя ось) и в диаметрах Земли (верхняя ось). Зеленая и красная кривые соответствуют результатам численного интегрирования функции видности (1) для источника (2). Интегрирование было выполнено с использованием пакета `finufft` версии 1.1.1 (см. [13]). Зеленая кривая

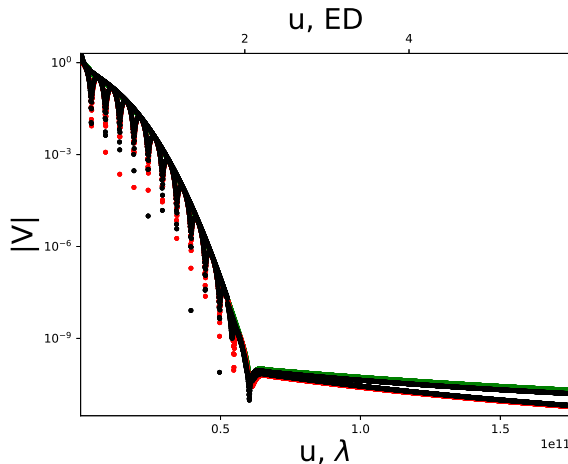


Рис. 2. Функция видности в зависимости от проекции базы u представлена на графике, где нижняя ось отображает значения в единицах длины волны, а верхняя ось — в диаметрах Земли. Зеленая и красная кривые получены с помощью численного интегрирования выражения (1). Зеленая кривая соответствует направлению $\phi_u = 0$, красная кривая — направлению $\phi_u = \pi/2$. Черные кривые — аналитические кривые полученные по формуле (10)

соответствует направлению $\phi_u = 0$, а красная кривая — $\phi_u = \pi/2$. Важно отметить, что при $\phi_u = \pi/2$ функция видности является действительной, тогда как при $\phi_u = 0$ она становится комплексной. Это различие связано с асимметрией в распределении яркости, что влияет на амплитуду и фазу функции видности. Черные кривые представляют собой аналитические решения, полученные по формуле (10). В целом, как ясно из рис. 2, согласие между аналитическими и численными кривыми довольно хорошее.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была построена аналитическая модель толстого асимметричного кольца с радиальным гауссовым профилем распределения яркости. Для данной модели была аналитически вычислена функция видности. Было показано, что функция видности является комплексной функцией и зависит как от радиуса, так и от ширины кольца. Кроме того, функция видности зависит от направления базы, т.е. угла ϕ_u . Также были вычислены амплитуды функции видности в двух перпендикулярных направлениях как численно, так и аналитически по формуле (10). Было показано, что аналитические формулы (10) достаточно хорошо согла-

суются с численными вычислениями, что подтверждает корректность предложенной модели и методов анализа. Данная модель может непосредственно использоваться для фитирования наблюдательных данных в различных миссиях [7]. Таким образом, полученные результаты могут быть полезны для дальнейших исследований в области радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами, а также для практического применения в наблюдениях образов сверхмассивных черных дыр.

ЛИТЕРАТУРА

1. The Event Horizon Telescope Collaboration, *Astrophys. J. Lett.* **875**, L1 (2019).
2. The Event Horizon Telescope Collaboration, *Astrophys. J. Lett.* **930**, L12 (2022).
3. J. P. Luminet, *A&A* **75**, 228 (1979).
4. P. Tiede, M. D. Johnson, D. W. Pesce, D. C. M. Palumbo, D. O. Chang, P. Galison, *Galaxies* **10**, 111 (2022).
5. M. D. Johnson et al., *Sci. Adv.* **6**, 1310 (2020).
6. A. G. Rudnitskiy, M. A. Shchurov, S. V. Chernov, T. A. Syachina, and P.R. Zapevalin, *Acta Astronautica* **212**, 361 (2023).
7. S. F. Likhachev, A. G. Rudnitskiy, < M. A. Shchurov, A. S. Andrianov, A. M. Baryshev, S. V. Chernov and V. I. Kostenko, *MNRAS* **511**, 668 (2022).
8. С. В. Чернов, *ЖЭТФ* **159**, 1018 (2021).
9. S. V. Chernov, M. A. Shchurov, I. I. Bulygin, and A. G. Rudnitskiy, arXiv:2502.03026.
10. А. Р. Томпсон, Д. М. Моран, Д. У. Свенсон, *Интерферометрия и синсинтез в радиоастрономии*, 2-е изд. Физматлит, Москва (2003).
11. В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Физматлит, Москва (2001)
12. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва (1963).
13. A. H. Barnett, J. F. Magland, and L. af Klinteberg, *SIAM J. Sci. Comput.* **41**, 479 (2019).