ЖЭТФ, 2001, том 119, вып. 4, стр. 627–632

КЛАСС ТОЧНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ИНДУЦИРОВАННОЙ ПОЛЕМ ЯНГА–МИЛЛСА НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

В. К. Щиголев[*], *М. В. Щиголев*

Ульяновский государственный университет
432700, Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 10 октября 2000 г.

Получен новый класс точных решений системы уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса и взаимодействующего с $SO(3)$-полем Янга–Миллса нелинейного скалярного поля в рамках пространственно-однородных космологических моделей Фридмана.

PACS: 04.20.Jb, 04.40.-b

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что решения полевых уравнений для самогравитирующих и самодействующих полей играют особую роль в физике ранней Вселенной вообще и в проблемах инфляции, в частности. При этом космологические модели инфляции могут быть построены на основе решений самосогласованной системы уравнений Эйнштейна и нелинейных (в простейшем варианте — скалярных) полей. Нелинейность скалярного инфлантонного поля выражается в его самодействии через неквадратичный потенциал, принимающий различные модификации в иерархии инфляционных моделей [1]. Отметим, что получено не так уж много примеров точных решений самосогласованной системы уравнений Эйнштейна и нелинейного скалярного поля в силу значительной сложности нелинейной системы. В этом плане весьма продуктивным, на наш взгляд, является метод тонкой подстройки потенциала, широко применяемый авторами работы [2] и позволяющий в отдельных случаях восстановить зависимость потенциала от поля и в любом случае проанализировать численно и графически зависимость поля и потенциала от времени.

С другой стороны, использование индуцированной через взаимодействие с другими полями нелинейности скалярного поля в космологии представляется нам вполне реалистичным подходом к описанию генерации нелинейности в рамках классической теории поля. К сожалению, при этом приходится решать сложную нелинейную систему уравнений не только для скалярного поля, но и для поля, индуцирующего нелинейность. Далеко не всегда удается получить точные решения даже для простейших конфигураций полей. Ситуация еще более усугубляется, когда рассматривают самогравитирующие поля, имея в виду космологические или астрофизические приложения решений. Интересные решения удается получить в предположении фонового характера космологического гравитационного поля, как, например, сделано в работах [3, 4], но такие решения не имеют прямого отношения к проблемам космологического сценария, хотя бы уже в силу их статического характера. Тем не менее сама идея индуцированной нелинейности весьма привлекательна в плане реализации именно в космологии вообще и, возможно, в космологии ранней Вселенной особенно. Ранее в ряде работ (см., например, [5]) были получены точные решения для самогравитирующих полей Янга–Миллса (ЯМ) в космологии. Однако применение этих решений для индуцирования нелинейности скалярного поля в космологии привело бы к неоднородным конфигурациям скалярного поля и, соответственно, к неоднородным космологическим моделям. Вместе с тем, нетривиальная топология $SO(3)$-полей ЯМ дает дополнительные возможности для поиска точных решений самосогласованной си-

[*] E-mail: shchigol@sv.uven.ru

стемы уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса и нелинейного скалярного поля [6]. В настоящей работе такая система решена в рамках космологических моделей Фридмана и обобщенного анзаца Ву–Янга для полей ЯМ.

2. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ ГРАВИТИРУЮЩИХ СКАЛЯРНЫХ И КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Будем исходить из лагранжиана самогравитирующего скалярного поля φ, нелинейность которого индуцируется $SO(3)$-симметричным полем ЯМ [3]:

$$L = \frac{R}{2\kappa_0} + \frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} - \frac{1}{16\pi}F^a_{\alpha\beta}F^{a\alpha\beta}\Psi(\varphi), \qquad (1)$$

где $F^a_{ij} = \partial_i W^a_j - \partial_j W^a_i + e\varepsilon_{abc}W^b_i W^c_j$ — тензор поля ЯМ W^a_i, а $\Psi(\varphi)$ — функция взаимодействия скалярного поля и поля ЯМ. Отметим, что в работе [4] подобный лагранжиан использован для описания взаимодействия с электромагнитным полем и для анализа статических конфигураций на фоне статической модели Фридмана–Робертсона–Уокера. В этой же работе подобного вида лагранжиан обосновывается существованием процесса распада $\pi \to 2\gamma$, а в работах Пичинелли и др. [7] отмечается, что в случае $\Psi(\varphi) = e^{-2\lambda\varphi}$ лагранжиан (1) содержит компактифицированную теорию Калуца–Клейна при $\lambda = \sqrt{3}$ и теорию суперструн при $\lambda = 1$. Такой же тип взаимодействия возникает в теории Бранса–Дикке.

Уравнения для полей ЯМ, скалярного поля и гравитационных потенциалов получаются варьированием лагранжиана по полям и метрике пространства-времени. В результате получаем систему самосогласованных уравнений Эйнштейна

$$G^\nu_\mu = \kappa_0 T^\nu_\mu, \qquad (2)$$

где тензор энергии-импульса полей равен

$$T^\nu_\mu = \varphi_{,\mu}\varphi^{,\nu} - \frac{1}{4\pi}F^a_{\mu\beta}F^{a\nu\beta}\Psi(\varphi) - \delta^\nu_\mu\left[\frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} - \frac{1}{16\pi}F^a_{\alpha\beta}F^{a\alpha\beta}\Psi(\varphi)\right], \qquad (3)$$

уравнения ЯМ

$$D_\nu\left(\sqrt{-g}F^{a\nu\mu}\Psi(\varphi)\right) = 0 \qquad (4)$$

и уравнение скалярного поля

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}g^{\nu\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right) + \frac{1}{16\pi}F^a_{\alpha\beta}F^{a\alpha\beta}\Psi_\varphi = 0. \qquad (5)$$

Символ D_ν означает ковариантную производную.

Будем предполагать для пространственно-временного интервала свойства сферической симметрии, и запишем его в виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - U(r,t)dr^2 - V(r,t)d\Omega^2, \\ d\Omega^2 &= d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \end{aligned} \qquad (6)$$

Одновременно для полей ЯМ запишем обобщенный анзац Ву–Янга [8]

$$\begin{aligned} W^a_i &= \varepsilon_{iab}x^b\frac{K(r,t)-1}{er^2} + \left(\delta^a_i - \frac{x^a x_i}{r^2}\right)\frac{S(r,t)}{er}, \\ W^a_0 &= x^a\frac{W(r,t)}{er}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Здесь и далее $i,j,k,\ldots = 1,2,3$ — пространственные, а $a,b,\ldots = 1,2,3$ — изотопические индексы; K,S,W — полевые функции указанных аргументов. После введения ортонормированного изорепера [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \\ \mathbf{l} &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta), \\ \mathbf{m} &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \end{aligned}$$

и перехода к сферическим координатам анзац (7) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= 0, \\ \mathbf{W}_2 &= e^{-1}\left\{(K-1)\mathbf{m} + S\mathbf{l}\right\}, \\ \mathbf{W}_3 &= e^{-1}\left\{-(K-1)\mathbf{l} + S\mathbf{m}\right\}\sin\theta, \\ \mathbf{W}_0 &= e^{-1}W\mathbf{n}. \end{aligned} \qquad (8)$$

В результате простых вычислений для тензора поля ЯМ имеем компоненты

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}_{01} = -\mathbf{F}_{10} = -e^{-1}W'\mathbf{n}, \\ &\mathbf{F}_{02} = -\mathbf{F}_{20} = \\ &= e^{-1}\left((\dot{K} + WS)\mathbf{m} + (\dot{S} - WK)\mathbf{l}\right), \\ &\mathbf{F}_{03} = -\mathbf{F}_{30} = \\ &= e^{-1}\left(-(\dot{K} + WS)\mathbf{l} + (\dot{S} - WK)\mathbf{m}\right)\sin\theta, \\ &\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = e^{-1}\left(K'\mathbf{m} + S'\mathbf{l}\right), \\ &\mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{32} = e^{-1}\sin\theta\left(K^2 - 1 + S^2\right)\mathbf{n}, \\ &\mathbf{F}_{13} = -\mathbf{F}_{31} = e^{-1}\sin\theta\left(-K'\mathbf{l} + S'\mathbf{m}\right). \end{aligned} \qquad (9)$$

Здесь и далее введены обозначения $(\dot{\ }) \equiv \partial/\partial t$, $(\ ') \equiv \partial/\partial r$.

Уравнения Эйнштейна (2) для тензора энергии-импульса (3) с учетом анзаца полей ЯМ (9) записываются в виде

$$\begin{aligned}
&G_0^0 = \kappa_0 \left\{ \frac{\dot\varphi^2}{2} + \frac{\varphi'^2}{2} + \right.\\
&+\frac{1}{8\pi e^2}\left[\frac{W'^2}{U} + \frac{2[(\dot K + WS)^2 + (\dot S - WK)^2]}{V} + \right.\\
&\left.\left.+\frac{2[K'^2+S'^2]}{UV} + \frac{(K^2-1+S^2)^2}{V^2}\right]\Psi\right\},\\
&G_1^1 = \kappa_0 \left\{ -\frac{\dot\varphi^2}{2} - \frac{\varphi'^2}{2} + \right.\\
&+\frac{1}{8\pi e^2}\left[\frac{W'^2}{U} - \frac{2[(\dot K + WS)^2 + (\dot S - WK)^2]}{V} - \right.\\
&\left.\left.-\frac{2[K'^2+S'^2]}{UV} + \frac{(K^2-1+S^2)^2}{V^2}\right]\Psi\right\},\\
&G_2^2 = G_3^3 = \kappa_0 \left\{ -\frac{\dot\varphi^2}{2} + \frac{\varphi'^2}{2} - \right.\\
&\left.-\frac{1}{8\pi e^2}\left[\frac{W'^2}{U} + \frac{(K^2-1+S^2)^2}{V^2}\right]\Psi\right\},\\
&G_1^0 = \kappa_0 \left\{ \dot\varphi\varphi' + \frac{1}{2\pi e^2} \times \right.\\
&\left.\times \frac{K'(\dot K + WS) + S'(\dot S - WK)}{V}\Psi\right\},
\end{aligned} \tag{10}$$

где для компонент тензора Эйнштейна G_μ^ν известны выражения через функции U и V метрики (6). Уравнения полей ЯМ (4) с помощью компонент тензора (9) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{VW'}{2\sqrt{U}}\Psi\right) + \sqrt{U}\times\\
&\times\left(\left(\dot S - WK\right)K - \left(\dot K + WS\right)S\right)\Psi = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{U}\left(\dot S - WK\right)\Psi\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{S'}{\sqrt{U}}\Psi\right) + \sqrt{U}\times\\
&\times\left(\frac{(K^2-1+S^2)\,S}{V} - \left(\dot K + WS\right)W\right)\Psi = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{U}\left(\dot K + WS\right)\Psi\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{K'}{\sqrt{U}}\Psi\right) + \sqrt{U}\times\\
&\times\left(\frac{(K^2-1+S^2)\,K}{V} + \left(\dot S - WK\right)W\right)\Psi = 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

а уравнение скалярного поля как

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{V\sqrt{U}}\frac{\partial}{\partial t}\left(V\sqrt{U}\dot\varphi\right) - \frac{1}{V\sqrt{U}}\frac{\partial}{\partial r}\left(V\frac{\varphi'}{\sqrt{U}}\right) - \\
&-\frac{1}{8\pi e^2}\left[\frac{W'^2}{U} + \frac{2[(\dot K + WS)^2 + (\dot S - WK)^2]}{V} - \right.\\
&\left.-\frac{2[K'^2+S'^2]}{UV} - \frac{(K^2-1+S^2)^2}{V^2}\right]\Psi_\varphi = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

где $\Psi_\varphi = d\Psi/d\varphi$.

Отметим, что в отсутствие скалярного поля решение системы уравнений (10), (11) для самогравитирующего чистого поля ЯМ было найдено в работе [8] в метрике Толмана при упрощающих предположениях относительно полевых функций: $K = S = 0$, но $W \neq 0$. Последнее означает, что поле ЯМ обладает электрическим зарядом, который и обусловливает неоднородность космологической модели. Если исходить из тех же предположений, что и в цитируемой работе, то решить полную самосогласованную систему уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса и нелинейного скалярного поля (12) не представляется возможным. Другой подход к решению уравнений может быть продиктован результатами работы [4], в которой авторы находят статические решения аналогичных полевых уравнений на фоне статической Вселенной. В настоящей работе предлагается новая подстановка для полевых функций ЯМ, которая позволяет исследовать замкнутую систему уравнений (10)–(12) и получить точные решения для нее.

3. КЛАСС МОДЕЛЕЙ С МЕТРИКОЙ ФРИДМАНА–РОБЕРТСОНА–УОКЕРА

Для однородной и изотропной Вселенной линейный элемент Фридмана–Робертсона–Уокера можно записать в виде

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(dr^2 + \xi^2(r)d\Omega^2\right), \tag{13}$$

где

$$\xi(r) = \begin{cases} \sin r, & k = +1,\\ r, & k = 0,\\ \operatorname{sh} r, & k = -1, \end{cases}$$

а $k = 0, \pm 1$ есть знак кривизны трехмерной гиперповерхности $t = \text{const}$, т. е. в метрике (6) следует положить $U = a^2(t)$ и $V = a^2(t)\xi^2(r)$. Для интервала Фридмана–Робертсона–Уокера (13) ненулевые компоненты тензора Эйнштейна равны [9]

$$G_0^0 = \frac{3}{a^2}\left(\dot a^2 + k\right),$$

$$G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = \frac{1}{a^2}\left(\dot a^2 + 2a\dot a + k\right).$$

Если потребовать, чтобы $W = 0$, $K = K(r)$, $S = S(r)$ и однородность скалярного поля $\varphi = \varphi(t)$, то система (11), (12) принимает вид

$$\begin{aligned} & S'' - \frac{(K^2 - 1 + S^2)S}{\xi^2} = 0, \\ & K'' - \frac{(K^2 - 1 + S^2)K}{\xi^2} = 0, \\ & \frac{1}{a^3}\frac{\partial}{\partial t}\left(a^3\dot\varphi\right) + \frac{1}{8\pi e^2 a^4}\times \\ & \times\left[\frac{2\left(K'^2+S'^2\right)}{\xi^2} + \frac{\left(K^2-1+S^2\right)^2}{\xi^4}\right]\Psi_\varphi = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Два первых уравнения структурно совпадают, что выражает симметрию лагранжиана относительно преобразований функций K и S вида

$$K = P(r)\cos\alpha, \quad S = P(r)\sin\alpha, \tag{15}$$

где α — произвольная константа. Следовательно, для функции $P(r)$ получаем уравнение

$$P''(r) - \frac{\left(P^2(r) - 1\right)P(r)}{\xi^2} = 0. \tag{16}$$

Для случая $k = \pm 1$, т. е. для случаев закрытой и открытой моделей Вселенной, решениями уравнения (16) являются следующие функции

$$P(r) = \xi'(r) = \begin{cases} \cos r, & k = +1, \\ \operatorname{ch} r, & k = -1. \end{cases} \tag{17}$$

Оставшиеся независимые уравнения Эйнштейна с помощью найденных решений уравнений ЯМ сводятся к следующей системе:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{a^2}\left(\dot a^2 + k\right) = \kappa_0\frac{\dot\varphi^2}{2} + \frac{3\kappa_0}{8\pi e^2}\,\frac{1}{a^4}\Psi(\varphi), \\ & \frac{1}{a^2}\left(\dot a^2 + 2a\ddot a + k\right) = -\kappa_0\frac{\dot\varphi^2}{2} - \frac{\kappa_0}{8\pi e^2}\,\frac{1}{a^4}\Psi(\varphi). \end{aligned} \tag{18}$$

При этом уравнение скалярного поля запишется в виде

$$\frac{1}{a^3}\frac{\partial}{\partial t}\left(a^3\dot\varphi\right) + \frac{3}{8\pi e^2}\,\frac{1}{a^4}\Psi_\varphi = 0. \tag{19}$$

Легко проверить, что в системе уравнений (18), (19) содержатся лишь два независимых уравнения, поэтому для решения системы необходимо задать одну из функций $a(t)$, $\varphi(t)$ или $\Psi(\varphi)$. Задание функции взаимодействия $\Psi(\varphi)$ представляется наиболее естественным, но необязательным условием и зависит от конкретного содержания решаемой задачи.

Отметим интересную особенность уравнений Эйнштейна (18), исходя из которых можно записать эффективные значения плотности энергии $\epsilon(t)$ и давления $p(t)$ следующим образом:

$$\epsilon(t) = \frac{\dot\varphi^2}{2} + 3\frac{1}{8\pi e^2 a^4}\Psi(\varphi),$$

$$p(t) = \frac{\dot\varphi^2}{2} + \frac{1}{8\pi e^2 a^4}\Psi(\varphi).$$

Отсюда следует, что $\epsilon - 3p = -\dot\varphi^2 \le 0$. Предельно жесткое уравнение состояния $\epsilon = p$ получается, естественно, в случае $\Psi = 0$. Таким образом, эффективное давление определяется неравенством $\epsilon/3 \le p \le \epsilon$. Подбором функции взаимодействия $\Psi(\varphi)$ можно получить требуемое уравнение состояние из указанного интервала для решения конкретной задачи космологического сценария. Нам представляется полезным применить рассматриваемую модель для обсуждения проблем квинтэссенции в духе работы [10] на основе возможной замагниченности Вселенной.

Для получения точных решений системы (18), (19) можно применить метод тонкой подстройки [11], при котором задается эволюция масштабного фактора $a(t)$. Из уравнений (18) можно найти

$$\begin{aligned} & \dot\varphi^2 = -\frac{6}{\kappa_0}\left(\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{\ddot a}{a} + \frac{k}{a^2}\right), \\ & \Psi = \frac{8\pi e^2}{\kappa_0}a^2\left(2\dot a^2 + a\ddot a + 2k\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Отсюда видно, что решение для действительного скалярного поля φ существует, если только

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{\ddot a}{a} + \frac{k}{a^2} < 0. \tag{21}$$

Последнее означает, в частности, что ускоренное расширение Вселенной с $\ddot a > 0$ возможно не всегда, а в случае $k = +1$ в данной модели вообще отсутствует. При включении в модель идеальной жидкости и космологической постоянной соотношение (21) и выводы относительно возможности ускоренного режима существенно отличаются от приведенных здесь.

Приведем простой пример решения для нелинейного скалярного поля (20) названным методом. Пусть масштабный фактор $a(t) = a_0 t$, а знак кривизны $k = -1$. Тогда из системы уравнений (20) получим

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{6}{\kappa_0}\left(1-a_0^2\right)}\,\frac{1}{a_0 t},$$

$$\Psi = \frac{16\pi e^2}{\kappa_0} a_0^2 \left(a_0^2 - 1\right) t^2.$$

Из первого уравнения следует, что решение существует, если $a_0 < 1$ и имеет вид

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{6}{\kappa_0}\left(\frac{1}{a_0^2} - 1\right)}\,\ln t + \varphi_0.$$

Исключая время из двух последних уравнений, находим функцию взаимодействия

$$\Psi = \Psi_0 e^{\pm 2\lambda\varphi}, \tag{22}$$

где

$$\Psi_0 = \frac{16\pi e^2}{\kappa_0} a_0^2 \left(a_0^2 - 1\right) e^{\mp 2\lambda\varphi_0},$$

а

$$\lambda = \sqrt{\frac{\kappa_0}{6}\frac{a_0^2}{(1-a_0^2)}}.$$

Рассмотрим другой пример, предполагая гармонический закон эволюции масштабного фактора в открытой ($k=-1$) модели Вселенной:

$$a(t) = H_0^{-1}\sin(H_0 t).$$

Подстановка последнего в систему (20) позволяет проинтегрировать систему и получить выражения следующего вида:

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{12}{\kappa_0}} H_0 t + \varphi_0,$$

$$\Psi = -\frac{24\pi e^2}{\kappa_0 H_0^2}\sin^4(H_0 t).$$

Отсюда можно получить в явном виде функцию взаимодействия:

$$\Psi = \Psi_0 \sin^4\left[\sqrt{\frac{\kappa_0}{12}}(\varphi - \varphi_0)\right], \tag{23}$$

где $\Psi_0 = -24\pi e^2/\kappa_0 H_0^2$.

Отметим, что независимо от конкретного вида функции взаимодействия $\Psi(\varphi)$, а следовательно, и от решений уравнений (18) ненулевые компоненты тензора полей ЯМ согласно формулам (9), (15) и (17) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = ke^{-1}\xi(r)(\mathbf{m}\cos\alpha + \mathbf{l}\sin\alpha),\\
&\mathbf{F}_{31} = -\mathbf{F}_{13} = ke^{-1}\xi(r)\times\\
&\quad\times\sin\theta(\mathbf{m}\sin\alpha - \mathbf{l}\cos\alpha),\\
&\mathbf{F}_{32} = -\mathbf{F}_{23} = ke^{-1}\xi^2(r)\mathbf{n}\sin\theta,
\end{aligned} \tag{24}$$

откуда следует, что поле ЯМ обладает только магнитными составляющими. Интересно, что именно это обстоятельство позволило нам найти однородные решения для скалярного поля. Действительно, из формул (24) легко найти инвариант поля ЯМ

$$\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu} = 3e^{-2}a^{-4}(t),$$

который и обусловил зависимость нелинейного по полю второго слагаемого в уравнении скалярного поля (18) только от временной переменной.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, нами найдено, что система уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса и нелинейного скалярного поля, получаемая из лагранжиана (1), имеет решения с однородным скалярным полем, взаимодействующим с полем ЯМ вида (24) во Вселенной Фридмана, ограниченные лишь условием (21). Система сведена к двум независимым уравнениям, (18) или (20), требующим доопределения либо конкретной функцией взаимодействия, либо заданием необходимого темпа эволюции масштабного фактора. Показано, что реализация последнего всегда может быть осуществлена, а простые примеры (22), (23) иллюстрируют возможность выявления явной зависимости функции взаимодействия от скалярного поля при некоторых режимах расширения Вселенной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 98-02-18040 и 00-01-00260).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*, Наука, Москва (1990).

2. S. V. Chervon, V. M. Zhuravlev, and V. K. Shchigolev, Phys. Lett. B **398**, 269 (1997).

3. K. A. Bronnikov, V. N. Melnikov, G. N. Shikin, and K. P. Stanukovich, Ann. Phys. **118**, 84 (1979).

4. Yu. P. Rybakov, B. Saha, and G. N. Shikin, E-print archive, gr-qc/96031031 (1996).

5. V. K. Shchigolev, S. V. Chervon, and O. V. Kudasova, General Relativity and Gravitation, **32**(1), 41 (2000).

6. В. К. Щиголев, М. В. Щиголев, в сб. *Тезисы докладов XII международной школы-семинара по теор. и мат. физике* «Волга-12'2000» (Казань, 22 июня–2 июля 2000 г.) (2000), с. 84.

7. G. Piccinelli, T. Matos, and M. Montesinos, E-print archive, gr-qc/9805032 (1998).

8. В. К. Щиголев, В. М. Журавлев, С. В. Червон, Письма в ЖЭТФ **64**, 65 (1996).

9. С. Вайнберг, *Гравитация и космология*, Мир, Москва (1975).

10. D. R. Matravers and C. G. Tsagas, E-print archive, gr-qc/0003181 (2000).

11. С. В. Червон, *Нелинейные поля в теории гравитации и космологии*, Изд-во Ульяновского государственного университета, Ульяновск (1997).